KOMPENDIUM MATURZYSTY

Matematyka

poziom podstawowy

Publikacja dystrybuowana bezpłatnie

Dostępna na stronie:

www.matematykam.pl

Autorka: Agnieszka Jędruszek

Kompendium do pobrania na stronie:
www.matematykam.pl
Publikacja jest dystrybuowana bezpłatnie

SPIS TREŚCI

1. **Potęgi i pierwiastki** 3
W tym: 1.1 Wykorzystanie wzorów; 1.2 Przekształcanie do tej samej podstawy potęgi w celu wykorzystania wzorów; 1.3 Wyłączanie czynnika spod znaku pierwiastka; 1.4 Usuwanie niewymierności.

2. **Wyrażenia algebraiczne** 5
W tym: 2.1 Wykorzystanie wzorów; 2.2 Zamiana sumy na iloczyn za pomocą wzorów skróconego mnożenia; 2.3 Zamiana sumy na iloczyn za pomocą wyłączania czynnika przed nawias.

3. **Procenty** 7
W tym: 3.1 Wykorzystanie wzoru (procent składany); 3.2 Typy zadań z procentami (proporcja), obliczanie procentu z liczby; 3.3 Punkty procentowe; 3.4 Procenty z procentów.

4. **Zbiory i przedziały** 9
W tym: 4.1 Pojęcie zbioru/przedziału i sposoby ich przedstawiania; 4.2 „Precyzowanie" zbiorów/przedziałów zapisanych za pomocą formuły logicznej; 4.3 Działania na zbiorach/przedziałach.

5. **Wartość bezwzględna** 12
W tym: 5.1 Istota wartości bezwzględnej; 5.2 Zapis wyrażeń za pomocą wartości bezwzględnej; 5.3 Opuszczanie wartości bezwzględnej wyrażeń (z pierwiastkami, ze zmienną „x"); 5.4 Równania z wartością bezwzględną; 5.5 Nierówności z wartością bezwzględną; 5.6 „Specyficzne" przypadki równań i nierówności (z zerem lub liczbą ujemną).

6. **Przybliżenia** 16
W tym: 6.1 Przybliżenie z nadmiarem i niedomiarem; 6.2 Błąd bezwzględny i względny przybliżenia.

7. **Funkcje** 16
W tym: 7.1Wektor w układzie współrzędnych; 7.2 Przyjęte oznaczenia oraz sposoby prezentacji funkcji; 7.3 Określanie dziedziny na podstawie wzoru; 7.4 Obliczanie miejsca zerowego ze wzoru funkcji; 7.5 Odczytywanie własności funkcji z wykresu; 7.6 Symetria punktu w układzie współrzędnych; 7.7 Transformacje wykresu funkcji; 7.8 Rysowanie funkcji w postaci $f(x-a)+b$.

8. **Geometria analityczna (funkcja liniowa, równanie okręgu)** 22
W tym: 8.1 Postaci funkcji liniowej; 8.2 Wykres i własności funkcji liniowej; 8.3 Równania prostej; 8.4 Wzajemne położenie prostych (warunek równoległości i prostopadłości); 8.5 Punkt wspólny dwóch prostych; 8.6 Określanie wzoru prostej; 8.7 Zadania z parametrem; 8.8 Wzory: długość odcinka, środek odcinka, odległość punktu od prostej; 8.9 Równanie okręgu.

9. **Funkcja kwadratowa** 29
W tym: 9.1 Postać ogólna (wyróżnik, miejsca zerowe, wierzchołek paraboli); 9.2 Postaci funkcji kwadratowej; 9.3 Wykres funkcji kwadratowej (parabola); 9.4 Własności funkcji kwadratowej (D, ZW, min/ max, monotoniczność); 9.5 Równania kwadratowe.; 9.6 Nierówności kwadratowe.

10. **Wielomiany** 35
W tym: 10.1 Działania na wielomianach (stopień wielomianu); 10.2 Zadania z parametrem; 10.3 Rozkład wielomianu na czynniki; 10.4 Równania wielomianowe; 10.5 Pierwiastek wielomianu.

11. **Funkcja wykładnicza** 38
W tym: 11.1 Wyrażenia wykładnicze; 11.2 Równania wykładnicze; 11.3 Wykres funkcji wykładniczej; 11.4 Własności funkcji wykładniczej.

12. **Logarytmy** 40
W tym: 12.1 Istota logarytmu; 12.2 Równania logarytmiczne; 12.3 Sposób na trudniejsze logarytmy; 12.4 Wzory i ich wykorzystanie.

13. **Wyrażenia wymierne** 42
W tym: 13.1 Dziedzina wyrażenia; 13.2 Upraszczanie wyrażenia; 13.3 Działania na wyrażeniach wymiernych; 13.4 Równania wymierne.

14. **Funkcja wymierna** 46
W tym: 14.1 Wykres; 14.2 Własności.

15. **Ciągi** 48
W tym: 15.1 Podstawowe informacje (pojęcie ciągu, wzór, wykres); 15.2 Monotoniczność ciągu; 15.3 Podstawowe pytania (który wyraz ciągu ma daną wartość?...); 15.4 Ciąg arytmetyczny (wzór ogólny, monotoniczność, sprawdzanie czy dany ciag jest arytmetyczny lub dla jakiej wartości parametru jest arytmetyczny, określanie wzoru ciągu, średnia arytmetyczna, suma wyrazów ciągu); 15.5 Ciąg geometryczny (wzór ogólny, sprawdzanie czy dany ciag jest geometryczny lub dla jakiej wartości parametru jest geometryczny, określanie wzoru ciągu, średnia geometryczna, suma wyrazów ciągu).

Kompendium do pobrania na stronie:
www.matematykam.pl
Publikacja jest dystrybuowana bezpłatnie

16. **Funkcje trygonometryczne** 54
W tym: 16.1 Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym; 16.2 Wartości funkcji trygonometrycznych; 16.3 Wzory (związki między funkcjami tego samego kąta); 16.4 Tożsamości trygonometryczne.
17. **Planimetria (figury płaskie)** 57
W tym: 17.1 Wzory dla figur płaskich (obwody, pola i inne); 17.2 Najważniejsze twierdzenia (Pitagorasa, Talesa); 17.3 Podobieństwo figur płaskich; 17.4 Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów; 17.5 Wzajemne położenie: dwóch okręgów, prostej i okręgu; 17.6 Kąty; 17.7 Wielokąty; 17.8 Okrąg wpisany i opisany na figurach.
18. **Stereometria (bryły)** 62
W tym: 18.1 Podział i nazewnictwo brył; 18.2 Kąty i odcinki w bryłach; 18.3 Pole powierzchni całkowitej i objętość brył; 18.4 Podobieństwo brył.
19. **Rachunek prawdopodobieństwa** 65
W tym: 19.1 Podstawowe pojęcia i oznaczenia; 19.2 Prawdopodobieństwo klasyczne; 19.3 Proste przypadki (rzut monetą/kostką); 19.4 Elementy kombinatoryki (zasada mnożenia, permutacje, wariacje bez powtórzeń, wariacje z powtórzeniami); 19.5 Drzewa zdarzeń; 19.6 Własności prawdopodobieństwa.
20. **Statystyka** 69
W tym: 20.1 Dane statystyczne i sposoby ich prezentacji; 20.2 Parametry danych statystycznych (średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe, moda, rozstęp).

1. POTĘGI I PIERWIASTKI

WZORY z tablic matematycznych (dostępnych podczas matury):

1 $\sqrt{a^2} = |a|$

- dla $a \neq 0$: 2 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- dla $a \geq 0$: 3 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$: 4 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

5 $a^0 = 1$

6 $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

7 $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

8 $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

9 $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

10 $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

1.1. Wykorzystanie wzorów. Na przykładach:

1 $\sqrt{3^2} = |3|$

2 $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

2 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

3 $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3}$

4 $4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}}$

5 $128^0 = 1$

6 $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$

7 $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$

8 $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$

9 $\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$

9 $3^7 \div 3^5 = 3^2$

10 $\left(\frac{8}{4}\right)^3 = \frac{8^3}{4^3}$

Wszystkie wzory działają w „obie strony”.
Przykładowo: dla wzoru 3:

$\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$

www.matematykam.pl

Ponadto powinniśmy pamiętać wzór:
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ Przykład: $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

1.2 Przekształcanie do tej samej podstawy potęgi w celu wykorzystania wzorów.

Mamy trzy podstawowe metody postępowania:

❖ Zmniejszanie podstawy przy wykorzystaniu wzoru: $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

Szukamy najmniejszego wspólnego dzielnika podstaw potęg. Tutaj dla kilku z nich będzie to liczba 2.

Zapisujemy podstawy potęg za pomocą wspólnego dzielnika

Wykorzystujemy wzór: $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$$\frac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 16^2 \cdot 3}{8^3 \cdot 32^2} = \frac{2^3 \cdot (2^2)^5 \cdot (2^4)^2 \cdot 3}{(2^3)^3 \cdot (2^5)^2} = \frac{2^3 \cdot 2^{10} \cdot 2^8 \cdot 3}{2^9 \cdot 2^{10}}$$

bo $2^5 = 32$

- Zamiana pierwiastka na potęgę zgodnie ze wzorem: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Przykład: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$
- Obracanie podstawy potęgi zgodnie ze wzorem $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, czyli zmieniając znak potęgi.

Przykład: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3^{-2}$ **Obracamy ułamek i zmieniamy znak potęgi (2 na -2).**

Przykład przedstawiający wykorzystanie wszystkich trzech metod:

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot(0{,}5)^{-2}\cdot 2^{13}}{16\cdot 4^2} = \frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 2^{13}}{2^4\cdot\left(2^2\right)^2} = \frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2^2\right)^{-3}\cdot 2^2\cdot 2^{13}}{2^4\cdot 2^4} =$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-6}\cdot 2^2\cdot 2^{13}}{2^8} = \frac{2^{\frac{1}{2}-6+2+13}}{2^8} = \frac{2^{\frac{1}{2}+9}}{2^8} = \frac{2^{9\frac{1}{2}}}{2^8} = 2^{9\frac{1}{2}-8} = 2^{1\frac{1}{2}} = 2\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

1.3 Wyłączanie czynnika spod znaku pierwiastka.

Aby to zrobić, należy najpierw zamienić liczbę znajdującą się pod pierwiastkiem na iloczyn dwóch liczb, tak aby jedną z liczb można było spierwiastkować. Następnie wykonujemy pierwiastkowanie tej liczby.

Największą trudność w wyciąganiu liczby spod znaku pierwiastka sprawia ustalenie liczb, których iloczyn należy zapisać, tak aby jedna z nich dała się spierwiastkować.

Aby sobie to ułatwić, można zastosować metodę, którą przedstawimy na przykładzie.

Przykład:

$\sqrt{320}$

Dzielimy liczbę znajdującą się pod pierwiastkiem przez kolejne liczby naturalne, zaczynając od liczby 2 (2,3,4,5 . . .) tak długo, aż uzyskamy liczbę, którą można spierwiastkować.

Dla przykładu:

320:2=160 – nie da się spierwiastkować
320:3=106,6… - nie da się spierwiastkować
320:4=80 – nie da się spierwiastkować
320:5=64 – da się spierwiastkować ($\sqrt{64}=8$),
dlatego zapisujemy liczbę 320 jako iloczyn liczb **64 i 5:**

$$\sqrt{320} = \sqrt{64\cdot 5} = 8\sqrt{5}$$

www.matematykam.pl

1.4 Usuwanie niewymierności.

Możemy wyróżnić dwa stopnie trudności:

- Gdy w mianowniku mamy tylko pierwiastek lub pierwiastek przemnożony przez jakąś liczbę. W takim przypadku usuwamy niewymierność, mnożąc licznik i mianownik przez pierwiastek z mianownika. **UWAGA!** Gdy mnożymy przez siebie dwa pierwiastki kwadratowe, otrzymujemy wartość pod pierwiastkiem; np.:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$$

Przykłady:

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3\cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}$$

❖ Gdy w mianowniku mamy sumę lub różnicę . W taki przypadku usuwamy niewymierność mnożąc licznik i mianownik przez całe wyrażenie z mianownika, ale ze zmienionym znakiem. Następnie w mianowniku wykonujemy mnożenie zgodnie z trzecim wzorem skróconego mnożenia.

Przykład:

Mnożymy licznik i mianownik przez wyrażenie z mianownika ze zmienionym znakiem: $(2-\sqrt{2})$

$$\frac{3}{2+\sqrt{2}}=\frac{3\cdot(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{6-3\sqrt{2}}{4-2}=\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$$

Wykorzystujemy wzór skróconego mnożenia: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ – następny podrozdział

2. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

WZORY z tablic matematycznych
(w dziale: WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA):

1 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 3 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 4 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

---

5 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

6 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

7 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

2.1 Wykorzystanie wzorów

❖ Pierwsze cztery wzory 1 2 3 4 „działają” w ten sam sposób. Przedstawimy to na przykładzie wymagającym skorzystania z drugiego wzoru: $(az^2-3b^3)^2$.

We zworze mamy: a^2. Naszym "a" w przykładzie jest wyrażenie : "az^2", tak więc: $(az^2)^2=a^2z^4$

We zworze mamy: b^2. Naszym "b" w przykładzie jest wyrażenie : "$3b^3$", tak więc: $(3b^3)^2=9b^6$

a b

$$(az^2-3b^3)^2=(az^2)^2-2\cdot az^2\cdot 3b^3+(3b^3)^2=a^2z^4-6ab^3z^2+9b^6$$

We zworze mamy: 2ab. Naszym "a" w przykładzie jest wyrażenie : " az^2". Naszym "b" w przykładzie jest wyrażenie : " $3b^3$", tak więc: $2\cdot az^2\cdot 3b^3=6ab^3z^2$

www.matematykam.pl

❖ Trzy ostatnie wzory 5 6 7 wymagają nieco innego podejścia. Ich wykorzystanie w takim kierunku jak został podany (pamiętajmy, że wszystkie wzory skróconego mnożenia możemy wykorzystać w „obie strony”), umożliwia zamianę sumy na iloczyn (następny podrozdział). Sposób wykorzystania tych trzech wzorów przedstawimy na przykładzie, wymagającym skorzystania z siódmego wzoru: $8a^3b^6+27a^9$. **UWAGA:** wybór wzoru jest zdeterminowany przez znak oraz przez potęgi symboli (dla piątego wzoru muszą być podzielne przez 2, a dla szóstego oraz siódmego muszą być podzielne przez 3).

Pierwsze wyrażenie to a podniesione do potęgi trzeciej. Jeżeli $a^3=8a^3b^6$, to $a=2ab^2$ [ponieważ $(2ab^2)^3=8a^3b^6$].

Drugie wyrażenie to b podniesione do potęgi trzeciej. Jeżeli $b^3=27a^9$, to $b=3a^3$ [ponieważ $(3a^3)^3=27a^9$].

a b

$$8a^3b^6+27a^9=(2ab^2+3a^3)(4a^2b^4-6a^4b^2+9a^6)$$

a^2: $(2ab^2)^2=4a^2b^4$; ab: $2ab^2\cdot 3a^3=6a^4b^2$; b^2: $(3a^3)^2=9a^6$

2.2 Zamiana sumy na iloczyn za pomocą wzorów skróconego mnożenia

W tym celu możliwe jest wykorzystanie wszystkich siedmiu wzorów skróconego mnożenia.
Trzy ostatnie wzory 5 6 7 wykorzystujemy, tak jak przedstawiliśmy to w poprzednim podpunkcie.
Cztery pierwsze wzory 1 2 3 4 wykorzystujemy w „drugą stronę" (głównie chodzi o wzory 1 i 2, bo z dwoma pozostałymi w ujęciu zamiany sumy na iloczyn się raczej nie spotkamy).Wykorzystanie czterech pierwszych wzorów w „drugą stronę" przedstawimy na przykładzie: $9a^2 - 12az^2 + 4z^4$.

Ustalamy, z którego wzoru możemy skorzystać. Suma składa się z trzech wyrażeń, co ogranicza nasz wybór do pierwszego i drugiego wzoru. Ponadto znaki między wyrażeniami wskazują jednoznacznie na wzór drugi: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – we wzorze mamy trzy wyrażenia i takie same znaki jak w podanej sumie $(9a^2 - 12az^2 + 4z^4)$.

$$9a^2 - 12az^2 + 4z^4 = (3a - 2z^2)^2$$

Ustalamy „a" i „b":
Ponieważ w podanym przykładzie $9a^2$ to „a^2", a wyrażenie $4z^4$ to „b^2", to
- „a" = 3a,
- „b" = $2z^2$.

Sprawdzamy, czy środkowe wyrażenie jest zgodne ze wzorem.
Powinno wynosić – 2ab, czyli: $2 \cdot 3a \cdot 2z^2 = 12az^2$, co oznacza, że otrzymaliśmy poprawny zapis. Gdyby środkowe wyrażenie się nie zgadzało, oznaczałoby to, że nie możemy zamienić podanej sumy na iloczyn za pomocą wzoru skróconego mnożenia.

www.matematykam.pl

2.3 Zamiana sumy na iloczyn za pomocą wyłączania czynnika przed nawias

Przedstawimy na przykładzie: $16a^2b^3 - 2ab^2 + 6a^2b^2 - 4a^3b^3c$.
Zaczynamy od ustalenia wyrażenia, jakie będzie znajdowało się przed nawiasem.
Osobno ustalamy jaka będzie wartość liczbowa, a osobno poszczególne symbole liter i ich potęgi.

Wartość liczbowa: szukamy największego wspólnego dzielnika – tutaj – 2. Aby wystawić dany symbol przed nawias, musi się powtórzyć w każdym wyrażeniu. Gdy ten warunek jest spełniony, wybieramy jego najniższą potęgę – tutaj:
- symbol „a" powtarza się w każdym wyrażeniu, a jego najmniejsza potęga wynosi a,
- symbol „b" powtarza się w każdym wyrażeniu, a jego najmniejsza potęga wynosi b^2,
- symbol „c" nie powtarza się w każdym wyrażeniu, więc nie możemy wystawić go przed nawias.
Ostatecznie wyrażenie, które wystawimy przed nawias ma postać: $2ab^2$

Następnie ustalamy wyrażenia w nawiasie. Wyrażenia w nawiasie będą miały takie same znaki jak pierwotne wyrażenia. Ich wartości liczbowe i symbole muszą mieć taką wartość, aby całe wyrażenie po przemnożeniu przez wyrażenie wystawione przed nawias dało nam z powrotem wartość pierwotną.

8ab bo $2ab^2 \cdot 8ab = 16a^2b^3$
1 bo $2ab^2 \cdot 1 = 2ab^2$

$$16a^2b^3 - 2ab^2 + 6a^2b^2 - 4a^3b^3c = 2ab^2(8ab - 1 + 3a - 2a^2bc)$$

3a bo $2ab^2 \cdot 3a = 6a^2b^2$
$2a^2bc$ bo $2ab^2 \cdot 2a^2bc = 4a^3b^3c$

3. PROCENTY

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: CIĄGI):
Procent składany:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

3.1 Wykorzystanie wzoru (procent składany)

Objaśnienie poszczególnych wielkości we wzorze:

K_n – kapitał końcowy

K – kapitał początkowy

n – liczba wszystkich kapitalizacji. Liczbę wszystkich kapitalizacji otrzymamy mnożąc liczbę lat przez liczbę kapitalizacji w roku:

n = liczba lat · liczba kapitalizacji w roku

p – oprocentowanie. Do wzoru podstawiamy oprocentowanie, jakie uzyskamy po uwzględnieniu liczby kapitalizacji w roku (kapitalizacja jest doliczaniem odsetek do kapitału). W tym celu dzielimy dane w zadaniu oprocentowanie przez liczbę kapitalizacji:

$$\mathbf{p = \frac{dane\ oprocentowanie}{liczba\ kapitalizacji\ w\ roku}}$$

Przykład:

200 000 zł zostało złożone na lokacie na trzy lata. Oprocentowanie lokaty wynosiło 5%, a odsetki były kapitalizowane co sześć miesięcy. Oblicz wartość kapitału na lokacie po trzech latach. Jaka wartość odsetek została zgromadzona w tym czasie?

dane:
K = 200 000 zł
liczba lat: 3
liczba kapitalizacji w roku: 2

$p = \frac{\text{dane oprocentowanie}}{\text{liczba kapitalizacji w roku}}$

$p = 5\% \div 2 = 2{,}5\%$

n = liczba lat · liczba kapitalizacji w roku

$n = 3 \cdot 2 = 6$

rozwiązanie:

Podstawiamy dane (K, p, n) do wzoru i obliczamy kapitał końcowy (K_n).

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100\%}\right)^n = 200000\text{zł}\left(1 + \frac{2{,}5\%}{100\%}\right)^6$$

$$K_n = 200000\text{zł}(1 + 0{,}025)^6 = 200000\text{zł}(1{,}025)^6$$

$$K_n = 200000\text{zł} \cdot 1{,}16 = 232000\text{zł}$$

Odsetki obliczymy, odejmując od kapitału końcowego kapitał początkowy.

$$K_n - K = 232000\text{zł} - 200000\text{zł} = 32000\text{zł}$$

Odpowiedź: Kapitał po trzech latach wynosi 232 000zł. Zgromadzono 32 000zł odsetek.

3.2 Typy zadań z procentami (proporcja), obliczanie procentu z liczby

❖ ***Typy zadań (proporcja)***

Właściwy zapis proporcji w zadaniach z procentami opiera się, ogólnie rzecz ujmując, na prawidłowym określeniu, **której wielkości będzie odpowiadać 100%.**
Zawsze będzie to wielkość stanowiąca „punkt odniesienia".
Dla ułatwienia, zadania z procentami podzieliliśmy na trzy podstawowe **typy:**

www.matematykam.pl

I – całość/część całości	**II** – wartość początkowa / wartość końcowa	**III** – wartość podstawowa / wartość porównywana
całość ——— 100%	wartość początkowa ——— 100%	wartość podstawowa ——— 100%
część całości ——— a%	wartość końcowa ——— a%	wartość porównywana ——— a%

Przykład: W koszu znajduje się 200 owoców, z czego 40 owoców to gruszki. Jaki procent wszystkich owoców stanowią gruszki.

W tym zadaniu całość stanowią wszystkie owoce, a częścią tej całości, która nas interesuje, są gruszki. Zapisujemy więc proporcje: wszystkim owocom (200) odpowiada 100%, a gruszkom (40) odpowiada nieznana wartość procentowa, którą mamy obliczyć, więc oznaczamy ją jako x%.

$$\begin{array}{ll} 200 & \text{——————} \quad 100\% \\ 40 & \text{——————} \quad x\% \end{array}$$

$$x\% = \frac{40 \cdot 100\%}{200} = 20\%$$

Odpowiedź: Gruszki stanowią 20% wszystkich owoców.

Przykład: Pewien produkt w sklepie został przeceniony o 20% i obecnie jego cena wynosi 200 zł. Ile kosztował ten produkt przed przeceną?

Wartością początkową będzie cena produktu przed przeceną (a więc przed zmianą), która jest niewiadomą i musimy oznaczyć ją jako x. Wartością końcową jest obecna cena (200zł). Tak więc cena przed przeceną (x), będzie odpowiadać 100%. Zanim zapiszemy drugą linijkę proporcji, należy ustalić, jaki procent przyrównamy do ceny po przecenie. Jeżeli cena spadła o 20% , to cena którą mamy obecnie, stanowi 80% ceny początkowej. Tak więc obecnej cenie (200zł) odpowiada 80%. UWAGA: W zadaniach tego typu, zazwyczaj musimy podany procent dodawać (gdy coś rośnie) lub odejmować (gdy coś maleje) od 100%.

$$\begin{array}{ll} x & \text{——————} \quad 100\% \\ 200 & \text{——————} \quad 80\% \end{array}$$

$$x = \frac{200 \cdot 100\%}{80\%} = 250\,\text{zł}$$

Odpowiedź: Produkt kosztował wcześniej 250zł.

Uwaga: Wartość podstawowa to ta, do której porównujemy.

Przykład: Koszt pewnego produktu w sklepie A wynosi 2000 zł, a w sklepie B 2500. O ile procent droższy jest ten produkt w sklepie B, niż w sklepie A?

W tym zadaniu wartością podstawową (wartością do której porównujemy) jest cena w sklepie A, a wartością porównywaną jest cena w sklepie B. Dlatego wartości ceny w sklepie A (2000zł) będzie odpowiadać 100%, a wartości ceny w sklepie B (2500zł) będzie odpowiadać nieznana wartość procentowa, którą oznaczymy jako x%.

$$\begin{array}{ll} 2000 & \text{——————} \quad 100\% \\ 2500 & \text{——————} \quad x\% \end{array}$$

$$x\% = \frac{2500 \cdot 100\%}{2000} = 125\%$$

UWAGA: Tu należy zinterpretować wynik. Skoro wartość ceny w sklepie B stanowi 125% wartości ceny w sklepie A – 100%, to gdy odpowiadamy na pytanie: o ile procent droższy jest produkt w sklepie B od ceny w sklepie A, należy jeszcze odjąć wartości procentowe (125% - 100%= 25%).

Odpowiedź: Cena w sklepie B jest o 25% wyższa od ceny w sklepie A.

❖ ***Obliczanie procentu z liczby***

Aby obliczyć procent z liczby, należy procent zamienić na ułamek, a następnie pomnożyć go przez tę liczbę. Jest to podejście uproszczone, którego możemy używać zamiast proporcji w prostych przypadkach.

Przykład:

W wagonie znajduje się 450 paczek. 10% z nich zostało uszkodzonych podczas transportu. Ile jest uszkodzonych paczek?

$$10\% = \frac{10\%}{100\%} = \frac{1}{10}$$

Zamieniamy procenty na ułamek, dzieląc przez 100%.

$$\frac{1}{10} \cdot 450 = 45$$

Mnożymy ułamek przez liczbę.

Odpowiedź: W wagonie znajduje się 45 uszkodzonych paczek.

www.matematykam.pl

3.3 Punkty procentowe

Punkty procentowe to różnica dwóch wartości procentowych. Obliczamy ją odejmując większą wartość procentową od mniejszej

Przykład:

W wyborach prezydenckich kandydat A otrzymał 35% głosów, a kandydat B 48% głosów. O ile punktów procentowych głosów więcej otrzymał kandydat B?

Aby obliczyć różnicę punktów procentowych, odejmujemy większą wartość procentową od mniejszej.

$48\% - 35\% = 13\%$

Odpowiedź: Kandydat B otrzymał 13 punktów procentowych więcej głosów.

3.4 Procenty z procentów

Obliczanie procentu z wartości procentowych, może wydawać się skompilowane i niejasne. Możemy znacznie ułatwić sobie obliczanie tego typu zadań, jeżeli **wartości procentowe, z których liczymy procent lub wartości procentowe, które porównujemy (o ile procent się różnią), będziemy traktować nie jak procenty, ale jak wartości liczbowe.** Wszelkie zasady działań na procentach oraz układanie proporcji (niezależnie od typu zadań z procentami) pozostają niezmienne. Zadania obliczamy w ten sam sposób jak zwykłe zadania z procentami.
Należy na samym wstępie ustalić, które wartości procentowe, będziemy traktować jak liczby.
Przykład:
W wyborach na przewodniczącego klasy Kasia otrzymała 50% głosów, a Tomek 40% głosów. O ile procent głosów więcej od Tomka otrzymała Kasia.
UWAGA! Gdy mamy pytanie : „o ile procent" nie mylmy go z pytaniem o punkty procentowe. Tu nie wystarczy odjąć jednej wartości procentowej od drugiej.

Wartości procentowe, traktujemy jak liczby i układamy proporcję.
Mamy do czynienia z trzecim typem zadań z procentami (wartość podstawowa – wartość porównywana).
Wartością podstawową w zadaniu jest 40%, a wartością porównywaną 50%.

$$\begin{array}{ll} 40\% & \text{——————} \quad 100\% \\ 50\% & \text{——————} \quad x\% \end{array}$$

$$x = \frac{50\% \cdot 100\%}{40\%} = 125\%$$

Tu należy jeszcze zinterpretować wynik. Jeżeli głosy Tomka oznaczono jako 100%, a głosy Kasi w rezultacie wynoszą 125% w porównaniu do głosów Tomka, to znaczy, że otrzymała o 25% głosów więcej.

$125\% - 100\% = 25\%$

Odpowiedź: Kasia otrzymała o 25% głosów więcej od Tomka.

4. ZBIORY I PRZEDZIAŁY

www.matematykam.pl

4.1 Pojęcie zbioru/przedziału i sposoby ich przedstawiania

- ***Zbiór*** przedstawia grupę konkretnych liczb. Zapis zbioru składa się z jego nazwy (zbiory oznaczamy dużymi literami) oraz jego elementów zapisanych w klamrze. Poszczególne elementy zbioru oddzielamy przecinkami lub średnikami.

Przykład: $A = \{1, 13, 24, 25\}$ Do zbioru należą cztery zapisane w klamrze liczby: 1, 13, 24, 25.

Zbiory dzielimy na:

- skończone,
To zbiory, które mają skończoną liczbę elementów. Przykład takiego zbioru został przedstawiony powyżej.

- nieskończone.
To zbiory mające nieskończoną liczbę elementów. W przypadku takiego zbioru, w klamrze zapisujemy kilka pierwszych elementów zbioru i trzykropek oznaczający, że zbiór ciągnie się do nieskończoności. Przykładem takiego zbioru jest zbiór liczb naturalnych N_+ (całkowitych dodatnich):

$N_+ = \{1, 2, 3, 4...\}$ Do zbioru należą wszystkie liczby całkowite dodatnie.

❖ ***Przedział*** ilustruje pewien zakres liczb. Przedziały liczbowe możemy przedstawić przy użyciu trzech podstawowych sposobów [przedstawimy je za pomocą przykładu przedziału zawierającego liczby od -5 (łącznie z -5) do nieskończoności]:

- za pomocą znaków nierówności;

$\leq$ **mniejszy lub równy** $\geq$ **większy lub równy** $<$ **mniejszy** $>$ **większy**

Dla przykładu: $x \geq -5$ **Liczby mają być większe lub równe od liczby -5 - łącznie z -5, dlatego wybieramy znak ≥, a nie znak >.**

- na osi liczbowej;

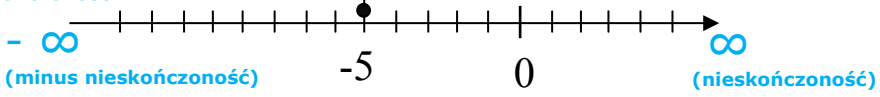
Gdy mamy podany przedział zapisany za pomocą znaku nierówności, ustalamy kierunek przedziału, zgodnie ze zwrotem znaku nierówności – w przykładzie przedział zawiera się od minus -5 do nieskończoności. Możemy również zastosować pewne uproszczenie. Znak nierówności jest jak grot strzałki, który wskazuje kierunek rysowania linii.

Ponadto, należy ustalić czy kropka przy liczbie wyznaczającej jeden z końców przedziału, będzie zakolorowana lub nie. Gdy liczba „graniczna" należy do przedziału (znak $\geq$ lub $\leq$), kropka będzie zakolorowana; a gdy nie należy do przedziału (znak > lub <), kropka będzie pusta.

Dla przykładu:

Znak nierówności skierowany w prawo. Liczby zawierają się w zakresie od -5 do nieskończoności.

Znak nierówności ≥, więc kropka jest zakolorowana.



- w nawiasie (do tego zapisu dążymy).

Zapis przedziału składa się z oznaczenia niewiadomej (x), znaku $\in$, który odczytujemy: „należy do" oraz przedziału dwóch liczb lub liczby i nieskończoności/-nieskończoności. Alternatywnie przedział może być również nazwany (oznaczony) dużą literą alfabetu. Gdy do zapisu przedziału nie używamy zmiennej „x", ale dużej litery alfabetu (np: A), zamiast znaku Є (należy do) używamy znaku równości (tak jak w zbiorach). Ponadto nawias może być:

· ***okrągły*** ( ), gdy na osi liczbowej kropka jest pusta (czyt. przedział otwarty), co oznacza, że dana liczba nie należy do przedziału. UWAGA: Przy nieskończoności nawias zawsze jest okrągły.

· ***trójkątny*** < > jeżeli na osi kropka jest zakolorowana (czyt. przedział domknięty), co oznacza, że dana liczba należy do przedziału.

Dla przykładu: $x \in \langle -5,\ \infty)$

Lewy nawias trójkątny (domknięty), bo kropka w przykładzie jest zakolorowana (liczba -5 należy do przedziału).
Prawy nawias okrągły (otwarty), bo przy nieskończoności zawsze jest otwarty.

Przedziały dzielimy na:

- ograniczone,

Są to przedziały, którego końce do dwie konkretne liczby. Przykład: $A = \langle -2,\ 8\rangle$

- nieograniczone.

Są to przedziały, w których jeden z końców to nieskończoność lub minus nieskończoność. Przykład: $C = \langle -3,\ \infty)$

4.2 „Precyzowanie" zbiorów/przedziałów zapisanych za pomocą formuły logicznej

W zadaniach zbiory i przedziały są często przedstawione w bardziej skomplikowany sposób, za pomocą formuły logicznej. Należy wtedy „uprościć" zapis danego zbioru/przedziału, interpretując podane warunki i określając jego zawartość.

www.matematykam.pl

Przykład 1.

$A = \{x \in C : 3 \leq x < 10\}$

W klamrze mamy zapisane dwa warunki (rozdzielone dwukropkiem):
- x Є C (liczby całkowite);
- 3 ≤ x < 10 (liczby z zakresu 3 – 10, łącznie z 3, ale bez 10).

$A = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

LICZBY SPEŁNIAJĄCE OBA WARUNKI: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Ponieważ oba warunki spełnia kilka liczb, używamy zapisu zbioru.

Przykład 2.

$A = \{x \in R : x < 7\}$

W klamrze mamy zapisane dwa warunki (rozdzielone dwukropkiem):
- x ∈ R (liczby rzeczywiste);
- x < 7 (liczby mniejsze od 7 – bez 7)

$A = (-\infty,\ 7)$

LICZBY SPEŁNIAJĄCE OBA WARUNKI: liczby z zakresu od minus nieskończoności do 7 (wyłączając liczbę 7).
Ponieważ oba warunki spełnia zakres liczb, używamy zapisu przedziału.

4.3 Działania na zbiorach/przedziałach

Operatory: $\subset$ - zawiera się w | $\cup$ - suma | $\cap$ - części wspólna | $\setminus$ - różnica

$\subset$ - zawiera się w - oznacza że jeden zbiór/przedział zawiera się w drugim.

Przykład:

Dane są zbiory: $A = \{-2,\ 3,\ 5,\ 6\}$ $B = \{-12,\ -6,\ -2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 53\}$

Możemy stwierdzić, że zbiór A zawiera się w zbiorze B, ponieważ wszystkie elementy ze zbioru A znajdują się również w zbiorze B. Zapisujemy to przy pomocy przedstawionego symbolu:

$A \subset B$

UWAGA: Gdy jeden zbiór/przedział nie zawiera się w drugim, stosujemy symbol przekreślonego znaku „zawiera się w": $A \not\subset B$

Kolejne trzy znaki reprezentują określone działania na zbiorach/przedziałach. W przypadku przedziałów, dla ułatwienia rysujemy oba na osi.

$\cup$ - suma:

- zbiorów, to nowy zbiór zawierający jednocześnie elementy obu zbiorów.

Przykład: $A = \{-10,\ -5,\ -2,\ -1\}$ $B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 4\}$

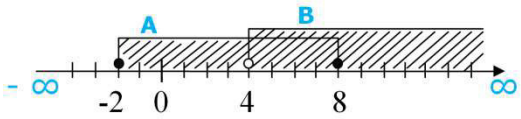
Sumą zbiorów A i B jest zbiór, zawierający elementy obu zbiorów.

$A \cup B = \{-10,\ -5,\ -2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 4\}$

- przedziałów, to przedział łączący oba przedziały. Po narysowaniu przedziałów na osi, kreskujemy oba przedziały.

Przykład: $A = \langle -2,\ 8\rangle$ $B = (4,\ \infty)$

Zaznaczamy oba przedziały na wspólnej osi.
Suma przedziałów A i B to oba przedziały łącznie.
Kreskujemy więc oba przedziały.



Odczytujemy zakreskowany przedział: $A \cup B = \langle -2,\ \infty)$

www.matematykam.pl

$\cap$ - części wspólna

- zbiorów, to nowy zbiór zawierający elementy, znajdujące się jednocześnie w pierwszym i drugim zbiorze.

Przykład: $A = \{-10,\ -5,\ -2,\ -1\}$ $B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 4\}$

Częścią wspólną zbiorów A i B jest zbiór zawierający elementy, należące jednocześnie do zbioru A i B (-2, -1).

$A \cap B = \{-2,\ -1\}$

UWAGA: Zbiory **niemające części wspólnej,** nazywamy **zbiorami rozłącznymi**.

- przedziałów , to przedział będący wspólnym fragmentem obu przedziałów.

Przykład: $A = \langle -2,\ 8\rangle$ $B = (4,\ \infty)$

Zaznaczamy oba przedziały na wspólnej osi.
Część wspólna przedziałów A i B to ich wspólny fragment. Kreskujemy więc fragment od 4 do 8, bo należy jednocześnie do obu przedziałów.

Odczytujemy zakreskowany przedział: $A \cap B = (4,\ 8\rangle$

\ - różnica

- zbiorów, to zbiór zawierający elementy pierwszego zbioru, które nie znajdują się w drugim zbiorze.

Przykład: $A = \{-10,\ -5,\ -2,\ -1\}$
$B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 4\}$

Różnica zbioru A i B, to te elementy pierwszego zbioru, które należą tylko do zbioru A (-10, -5). Liczby: -2 oraz -1 należy wykluczyć, bo należą jednocześnie do zbioru B.

$$A \setminus B = \{-10,\ -5\}$$

Różnica zbioru B i A, to te elementy, które należą tylko do zbioru B (0, 2, 4). Liczby: -2 oraz -1 należy wykluczyć, bo należą jednocześnie do zbioru A.

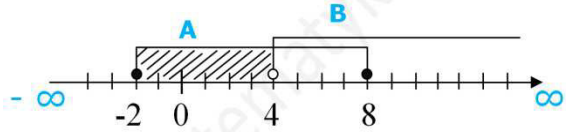
$$B \setminus A = \{0,\ 2,\ 4\}$$

- przedziałów , to przedział zawierający ten fragment pierwszego przedziału, który nie należy do drugiego przedziału.

Przykład: $A = \langle -2,\ 8\rangle \quad B = (4,\ \infty)$

Zaznaczamy oba przedziały na wspólnej osi.

Różnica przedziałów A i B, to ten fragment przedziału A (od -2 do 4), który nie zawiera się jednocześnie w przedziale B.



UWAGA – Mając do czynienia z różnicą przedziałów w punkcie, w którym zaczyna się drugi przedział – 4 (który jest jednocześnie jedną z granic rozwiązania), nawias wybieramy przeciwnie, niż wskazuje na to kropka!

Odczytujemy zakreskowany przedział: $A \setminus B = \langle -2,\ 4\rangle$

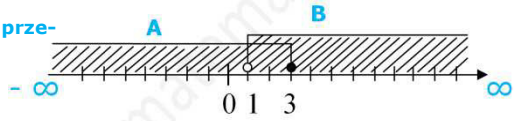
W zadaniach dotyczących działań na zbiorach i przedziałach, możemy trafić na przypadki, w których rozwiązaniem jest zbiór pusty, zbiór liczb rzeczywistych lub których rozwiązaniem nie jest jeden przedział.

Wszystkie przypadki, na jakie możemy trafić, są omówione na naszej stronie: **www.matematykam.pl**

Przykład: Suma przedziałów $A = (-\infty,\ 3\rangle,\ B = (1,\ \infty)$ jest zbiorem liczb rzeczywistych (R).

Zaznaczamy oba przedziały na wspólnej osi.

Suma przedziałów A i B to oba przedziały łącznie. Kreskujemy więc oba przedziały.



Zakreskowany jest cały przedział liczb, od minus do plus nieskończoności. Mamy więc do czynienia ze zbiorem liczb rzeczywistych.

$$A \cup B = R$$

www.matematykam.pl

5. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA):

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

5.1 Istota wartości bezwzględnej

Większość wzorów dotyczących wartości bezwzględnej, zamieszczonych w tablicach matematycznych, nie jest istotna dla uczniów zdających egzamin na poziomie podstawowym. Ten, który uwzględniliśmy i zamieściliśmy w ramce powyżej, jest w rzeczywistości „opisem" istoty wartości bezwzględnej i nie wykorzystujemy go w sposób, jak to robimy z innymi wzorami.

Wartość bezwzględna:

- z liczb dodatnich, nie zmienia ich znaku,
- z liczb ujemnych, zmienia ich znak na przeciwny.

Przykłady: $|10| = 10$, $|-7| = 7$

5.2 Zapis wyrażeń za pomocą wartości bezwzględnej

Wyrażenie możemy zapisać za pomocą wartości bezwzględnej, gdy ma postać: $\sqrt{a^2}$, bo wtedy możemy wykorzystać wzór: $\sqrt{a^2}=|a|$ (przedstawiony został w pierwszym rozdziale: strona 3).

Przykłady: $\sqrt{5^2}=|5|$, $\sqrt{(2x-2z)^2}=|2x-2z|$

Niektóre wyrażenia należy jednak najpierw przekształcić do postaci: $\sqrt{a^2}$.

W przypadku liczb jest to stosunkowo proste. Przykład: $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=|3|$

W przypadku wyrażeń algebraicznych, musimy je najpierw przekształcić za pomocą wzorów skróconego mnożenia. Mowa tu tylko o dwóch wzorach:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, z których korzystamy oczywiście w „drugą stronę" (podrozdział 2.2). Przykład: $\sqrt{4a^2-4a+1}=\sqrt{(2a-1)^2}=|2a-1|$

5.3 Opuszczanie wartości bezwzględnej wyrażeń (z pierwiastkami, ze zmienną „x")

Wykonujemy dwie czynności:

- Ustalamy znak wyrażenia,
- Opuszczamy znak wartości bezwzględnej zgodnie z ustalonym znakiem:

- gdy wyrażenie jest **dodatnie**, po opuszczeniu wartości bezwzględnej, **przepisujemy je bez zmian,**
- gdy wyrażenie jest **ujemne**, po opuszczeniu wartości bezwzględnej, **zmieniamy wszystkie znaki**.

Wyrażenia z pierwiastkami (niewymierne)	**Wyrażenia ze zmienną „x"**
Ustalamy znak wyrażenia.	
Szacujemy jaki znak miałby wynik działania, gdybyśmy mogli je wykonać.	Oprócz samego wyrażenia pojawia się przedział, do którego należy „x". Aby ustalić znak wyrażenia, najprostszym sposobem jest obliczenie wartości wyrażenia dla wybranej wartości „x" (musi należeć do przedziału).
Przykład: $\lvert 3\sqrt{2}-6\rvert$	Przykład: $\lvert -4x+8\rvert$ dla $x \in (-\infty, 2\rangle$
$3\sqrt{2}$ - pierwiastek z dwóch daje wartość mniejszą niż 2, co po przemnożeniu przez 3, dałoby wartość mniejszą od 6. W związku z tym wartość dodatnia ($3\sqrt{2}$) jest mniejsza od wartość ujemnej (-6), dlatego wynik byłby ujemny.	Wybieramy przykładowy „x" z przedziału – my wybraliśmy liczbę 1. Obliczamy wartość wyrażenia dla wybranej liczby: -4·1 +8 =– 4 +8= 4 Wynik okazał się dodatni, co oznacza, że wyrażenie dla podanego przedziału jest dodatnie.
WYRAŻENIE UJEMNE	***WYRAŻENIE DODATNIE***
Opuszczamy znak wartości bezwzględnej zgodnie z ustalonym znakiem.	
Ponieważ wartość wyrażenia okazała się ujemna, opuszczając wartość bezwzględną, zmieniamy wszystkie znaki.	Ponieważ wartość wyrażenia okazała się dodatnia, opuszczając wartość bezwzględną, nie zmieniamy znaków.
$\lvert 3\sqrt{2}-6\rvert=-3\sqrt{2}+6$	$\lvert -4x+8\rvert=-4x+8$

www.matematykam.pl

5.4 Równania z wartością bezwzględną

Omówione poniżej metody służą do rozwiązywania **„typowych" równań**, to znaczy takich, w których po **prawej stronie znajduje się liczba dodatnia**.

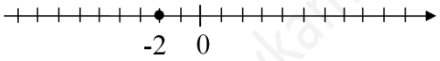
Istnieją dwie metody ich rozwiązywania. Pierwsza z nich (**interpretacja graficzna**) nadaje się jedynie do rozwiązywania równań, **w których „x" ma współczynnik liczbowy 1** (czyli przed „x" nie ma żadnej liczby ani minusa). **Druga metoda nadaje się do wszystkich „typowych" równań**. Obie metody przedstawimy na przykładach:

Interpretacja graficzna

Przykład: $|x+2|=6$

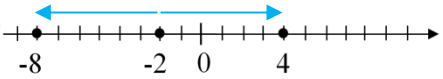
I. Rysujemy oś liczbową i zaznaczamy na niej **liczbę zawartą w wyrażeniu,** umieszczonym w wartości bezwzględnej, **ale ze zmienionym znakiem.**

$|x+2|=6$ W wrażeniu mamy liczbę 2, dlatego na osi zaznaczmy liczbę: -2 (pamiętajmy o zamianie znaku).



II. Szukamy **dwóch liczb**, których **odległość od** zaznaczonej na osi **liczby**, równa się wartości **po prawej stronie równania**.

Na osi szukamy dwóch liczb, których odległość od -2 wynosi 6.



III. Zapisujemy rozwiązania łącząc je słowem **„lub”** albo znakiem „v”.

$x=-8 \ \text{v} \ x=4$

Metoda „obliczeniowa”

Przykład: $|5x-10|=25$

Metoda polega na rozwiązaniu **dwóch równań,** rozdzielonych słowem „lub” albo znakiem zastępującym to słowo – „v”. W efekcie otrzymujemy dwie liczby, które są rozwiązaniem równania:

Pierwsze równanie przepisujemy bez zmian, omijając jedynie wartość bezwzględną.

W drugim równaniu zmieniamy znak liczby po prawej stronie (zamiast 25 zapisujemy -25).

$$5x-10=25 \quad \text{v} \quad 5x-10=-25$$
$$5x=25+10 \qquad 5x=-25+10$$
$$5x=35/\div 5 \qquad 5x=-15/\div 5$$
$$x=7 \quad \text{v} \quad x=-3$$

❖ ***Upraszczanie złożonych równań.***

Czasami równania z wartością bezwzględną są podane w „mniej przyjemnej” formie. Aby było możliwe ich rozwiązanie (jedną z dwóch powyżej opisanych metod), konieczne jest ich przekształcenie, do postaci, w jakiej podane były dotychczas przedstawione równania.

Przykład: $10|2x+4|+2=3|2x+4|+18+5|2x+4|$

Podstawowa zasada podczas przekształcania, to traktowanie wartości bezwzględnej jako całości i obliczanie jej zgodnie z regułami przekształcania równań.

Wartość bezwzględną traktujemy jako całość. Równanie przekształcamy w taki sposób, jakby cała wartość bezwzględna wynosiła x:
10x + 2 = 3x + 18 + 5x

www.matematykam.pl

$$10|2x+4|+2=3|2x+4|+18+5|2x+4|$$

Dodajemy wyrażenia z wartością bezwzględną (3|2x+4| oraz 5|2x+4|) , tak jakbyśmy mieli do czynienia z wyrażeniami 3x i 5x:
3|2x+4| + 5|2x+4| = 8|2x+4|

$$10|2x+4|+2=8|2x+4|+18$$

Przenosimy wyrażenia z wartością bezwzględną na lewo, a liczby na prawo (ze zmienionym znakiem). UWAGA - nie zmieniamy znaków wewnątrz wartości bezwzględnej.

$$10|2x+4|-8|2x+4|=18-2$$

Dodajemy wyrażenia z wartością bezwzględną (10|2x+4| oraz – 8|2x+4|) , tak jakbyśmy mieli do czynienia z wyrażeniami 10x i -8x:
10|2x+4| - 8|2x+4| = 2|2x+4|

$$2|2x+4|=16 \quad /\div 2$$

Dzielimy całe równanie przez 2.

$$|2x+4|=8$$

Otrzymujemy równanie w odpowiedniej formie. To równanie można rozwiązać tylko metodą obliczeniową, przedstawioną w poprzednim punkcie.

5.5 Nierówności z wartością bezwzględną

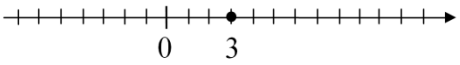
Podobnie jak w przypadku równań mamy dwie metody dla „typowych” przypadków, (gdy po prawej stronie znajduje się wartość dodatnia). Pierwsza metoda tylko dla równań o współczynniku „x” równym 1, a druga dla wszystkich równań.

Interpretacja graficzna

Przykład: $|x-3| \geq 4$

I. Rysujemy oś liczbową i zaznaczmy na niej **liczbę zawartą w wyrażeniu,** umieszczonym w wartości bezwzględnej, **ale ze zmienionym znakiem.**

$|x-3| \geq 4$ W wyrażeniu mamy liczbę -3, dlatego na osi zaznaczmy liczbę: 3 (pamiętajmy o zmianie znaku).

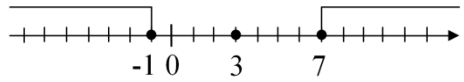


II. Szukamy **dwóch liczb**, których **odległość od** zaznaczonej na osi **liczby**, równa się wartości **po prawej stronie równania**.

Na osi szukamy dwóch liczb, których odległość od 3 wynosi 4.

III. Zaznaczamy przedział lub przedziały.
Mamy dwie możliwości:
- gdy **znak nierówność** jest skierowany **w prawo (>)**, to zaznaczamy **dwa przedziały: od minus nieskończoność do pierwszej liczby oraz od drugiej liczby do nieskończoności;**
- gdy **znak nierówności** jest skierowany **w lewo (<)**, to zaznaczamy **jeden przedział, łączący dwie wyznaczone liczby.**

Tu mamy do czynienia z pierwszą możliwością, bo znak nierówności jest skierowany w prawo (≥). Rysujemy więc dwa przedziały:
- od minus nieskończoności do liczby -1,
- od liczby 7 do nieskończoności.



IV. Odczytujemy przedział lub przedziały.

Ponieważ rozwiązaniem są dwa przedziały, zapisujemy je oba, łącząc znakiem sumy.

$x \in (-\infty,\ -1\rangle \cup \langle 7,\ \infty)$

Metoda „obliczeniowa"

Przykład: $|2x+1| < 5$

Metoda polega na rozwiązaniu **dwóch nierówności.** W efekcie otrzymujemy dwie liczby, które zaznaczamy na osi liczbowej.

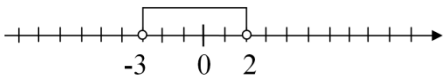
Pierwszą nierówność przepisujemy bez zmian, omijając jedynie wartość bezwzględną.

W drugiej nierówności zmieniamy znak liczby po prawej stronie (zamiast 5 zapisujemy -5) i obracamy znak nierówności.

$$2x+1<5 \qquad 2x+1>-5$$
$$2x<5-1 \qquad 2x>-5-1$$
$$2x<4 \quad /\div 2 \qquad 2x>-6 \quad /\div 2$$
$$x<2 \qquad x>-3$$

Zaznaczamy przedział lub przedziały.
Odbywa się to na tej samej zasadzie, jak w przypadku metody dla prostszych przykładów. **Zaznaczamy uzyskane liczby na osi**, a następnie zaznaczamy **przedział lub przedziały**, zgodnie z przedstawioną wcześniej regułą (**dwa przedziały,** gdy znak nierówności jest skierowany **w prawo**; **jeden przedział**, gdy znak nierówności jest skierowany **w lewo**).

Tu mamy do czynienia z drugą możliwością, bo znak nierówności jest skierowany w lewo (<). Rysujemy więc jeden przedział: od -3 do 2.



Odczytujemy przedział lub przedziały.

$x \in (-3,\ 2)$

www.matematykam.pl

5.6 „Specyficzne" przypadki równań i nierówności (z zerem lub liczbą ujemną).

Gdy po prawej stronie równania lub nierówności z wartością bezwzględną znajduje się liczba ujemna lub zero, nie rozwiążemy ich przedstawionymi w poprzednich podrozdziałach metodami.

Musimy do nich podejść „na logikę".

Przykład: $|-2x+4| \geq 0$

Obliczając wartość bezwzględną, zawsze otrzymamy liczbę większą od zera lub równą zero.

Tak więc każda liczba po podstawieniu za „x" będzie spełniać tę nierówność.
Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych

$x \in R$

Wszystkie przypadki równań i nierówności z wartością bezwzględną, na jakie możemy trafić, są omówione na naszej stronie: **www.matematykam.pl: MATERIAŁ MATURALNY → wartość bezwzględna → równania → nierówności**

6. PRZYBLIŻENIA

6.1 Przybliżenie z nadmiarem i niedomiarem

Przybliżenie z nadmiarem powstaje, gdy podczas zaokrąglania liczby, zwiększamy ostatnią pozostawioną cyfrę o jeden.

Przykład:

Zaokrąglamy liczbę 12,399367 do pierwszego miejsca po przecinku.

$12{,}399367 \approx 12{,}4$

Pierwszą cyfrę po przecinku (3) musieliśmy zwiększyć o jeden, ponieważ następna cyfra była większa od 5 (9). W efekcie liczba uległa zwiększeniu.

Przybliżenie z niedomiarem powstaje, gdy podczas zaokrąglania, ostatnia pozostawiona cyfra nie zmienia się.

Przykład:

Zaokrąglamy liczbę 6,963902 do drugiego miejsca po przecinku.

$6{,}963902 \approx 6{,}96$

Drugą cyfrę po przecinku (6) pozostawiliśmy bez zmian, ponieważ znajdująca się za nią cyfra jest mniejsza od 5 (3). W efekcie liczba uległa zmniejszeniu o „obciętą" wartość.

6.2 Błąd bezwzględny i względny przybliżenia

***Błąd bezwzględny*,** to wartość bezwzględna z różnicy przybliżenia i danej liczby. Wzór na błąd bezwzględny ma więc postać:

$|b-a|$

a – dana liczba

b – przybliżenie liczby

Błąd względny, pokazuje jaką częścią danej liczby jest wartość, o jaką zmniejszyliśmy lub powiększyliśmy liczbę:

$$\frac{|b-a|}{a}$$

Błąd względny może być wyrażany w procentach:

$$\frac{|b-a|}{a}\cdot 100\%$$

Przykład: Zaokrągliliśmy liczbę 20,5502 do części dziesiętnych: $20{,}5402 \approx 20{,}5$

a = 20,5402, b = 20,5

- błąd bezwzględny:

$|b-a| = |20{,}5 - 20{,}5402| = |-0{,}0402|$

$|b-a| = 0{,}0402$

- błąd względny:

$$\frac{|b-a|}{a} = \frac{|-0{,}0402|}{20{,}5402} = \frac{0{,}0402}{20{,}5402} \approx 0{,}002$$

7. FUNKCJE

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: GEOMETRIA ANALITYCZNA):

Wektor:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A,\ y_B - y_A]$$

www.matematykam.pl

7.1 Wektor w układzie współrzędnych

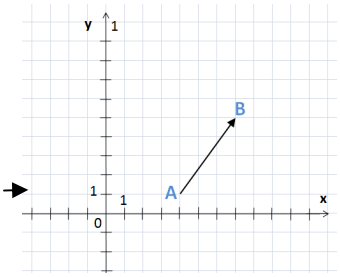
Wzór (zapisany powyżej) służy do obliczania ***współrzędnych przesunięcia*** wektora. Określają one, o ile jednostek i w którą stronę należy wykonać przesunięcie w poziomie i w pionie, aby ***z punktu zaczepienia*** (A) „dojść" do ***punktu końcowego*** (B).

Punkt zaczepienia (punkt początkowy wektora): $A = (x_A,\ y_A)$

Punkt końcowy: $B = (x_B,\ y_B)$

Graficznie wektor w układzie współrzędnych ma postać strzałki.

Przykład: A = (4, 1); B = (7, 5)



$$\overrightarrow{AB} = [7-4,\ 5-1] = [3,\ 4]$$

7.2 Przyjęte oznaczenia oraz sposoby prezentacji funkcji

❖ ***Oznaczenia przyjęte w opisie funkcji***

- Dziedzina (zbiór argumentów): oznaczamy za pomocą liter: **x**, **X**, **D** lub **Df,**

- Zbiór wartości: oznaczamy za pomocą liter: **y**, **Y**, **ZW** , **Zf** lub zapisu **f(x)** (gdy zapisujemy wzór funkcji).

Dziedzina i zbiór wartości mogą, w zależności od zakresu należących do niego liczb, zostać przedstawiony za **pomocą zbioru** lub **przedziału**, co przedstawimy na przykładach.

Przykład 1.

Załóżmy, że do dziedziny należą liczby: -2, 3, 4, 5, 10, a do zbioru wartości należą liczby 1, 2, 4 , 6 , 15. Mamy tu do czynienia ze **zbiorami liczb.**

Dziedzinę możemy zapisać na kilka sposobów:

$X = \{-2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10\}$

$D = \{-2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10\}$

$Df = \{-2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10\}$

Zbiór wartości możemy zapisać:

$Y = \{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 15\}$

$ZW = \{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 15\}$

$Zf = \{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 15\}$

Przykład 2.

Załóżmy, że do dziedziny należą liczby z zakresu od liczby -5 do nieskończoności (łącznie z -5), a do zbioru wartości liczby z zakresu od 2 do 15 (włącznie z liczbą 15, ale bez liczby 2). Mamy tu do czynienia z **przedziałami liczb.**

Dziedzinę możemy zapisać:

$x \in \langle -5,\ \infty)$ $X = \langle -5,\ \infty)$

$D = \langle -5,\ \infty)$ $Df = \langle -5,\ \infty)$

Zbiór wartości możemy zapisać:

$y \in (2,\ 15\rangle$ $Y = (2,\ 15\rangle$

$ZW = (2,\ 15\rangle$ $Zf = (2,\ 15\rangle$

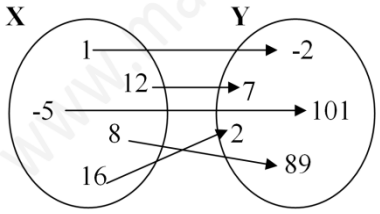
www.matematykam.pl

❖ ***Najważniejsze sposoby prezentacji funkcji***

Graf

Sposób znany już z podstawówki, stosowany tylko dla funkcji, których dziedziną i zbiorem wartości są **skończone zbiory liczb.**

Przykład:



Tabela

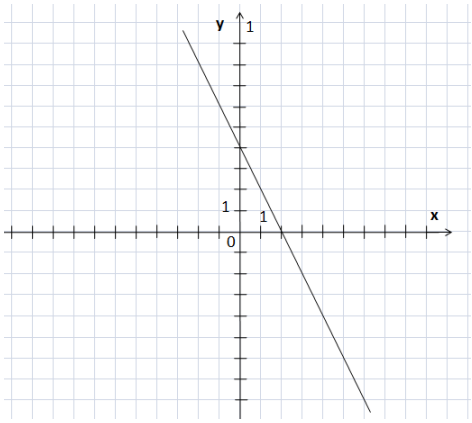
Tak jak w przypadku grafu, tym sposobem możemy przedstawić tylko te funkcje, których dziedziną i zbiorem wartości są **skończone zbiory liczb. Tabeli używamy często dla funkcji, które nie spełniają tego warunku, ale jest to funkcja zaledwie pomocnicza (w tabeli zapisujemy współrzędne punktów, które obliczamy, aby narysować wykres funkcji).**

Przykład:

x	-1	0	2	4
f(x)	3	-4	6	-2

Wykres

Przykład:



Wzór

Zdecydowana większość funkcji z jakimi mamy do czynienia, jest przedstawiona w postaci wzoru. Wzór funkcji może być przedstawiony na dwa sposoby, w zależności od tego, jaki symbol wykorzystamy do oznaczenia wartości funkcji: **y** czy **f(x).**

Przykład:

Funkcję o wzorze: **2x+4**, możemy zapisać:

$y = 2x + 4$; $f(x) = 2x + 4$

7.3 Określanie dziedziny na podstawie wzoru

Jeżeli dziedzina nie jest z góry ograniczona do zbioru lub przedziału, musimy sami stwierdzić czy należy do zbioru liczb rzeczywistych (R), czy istnieją we wzorze działania, które ją ograniczają.

Dziedzina funkcji będzie **ograniczona w dwóch przypadkach:**

- gdy we wzorze pojawiają się pierwiastki parzystego stopnia (drugiego, czwartego…);

Ponieważ pod pierwiastkiem parzystego stopnia, nie mogą pojawiać się liczby ujemne, należy zapisać, że wyrażenie pod pierwiastkiem musi być większe lub równe zero, a następnie rozwiązać otrzymaną nierówność.

Przykład: $f(x)=\sqrt{2x+8}-3$

Wyrażenie pod pierwiastkiem (2x + 8) powinno być dodatnie, czyli większe lub równe zero. Zapisujemy nierówność:

$$2x+8\geq 0$$
$$2x\geq -8 \quad /\div 2$$
$$x\geq -4$$

Wynik nierówności to **przedział**, który jest **dziedziną naszej funkcji.**

$Df=\langle -4,\ \infty)$ **Rozwiązaniem nierówności są liczby większe lub równe -4, dlatego dziedzina funkcji, to przedział od -4 (domknięty) do nieskończoności.**

- gdy zmienna „x" pojawia się w mianowniku jakiegoś ułamka.

Wyrażenie w mianowniku musi być różne od zera (ponieważ nie można dzielić przez zero). Zapisujemy więc nietypowe równanie z przekreślonym znakiem równości.

Przykład: $f(x)=\frac{2x^2-3}{3x-6}-2x$

Wyrażenie w mianowniku (3x -6) powinno być różne od zera. Zapisujemy więc równanie z przekreślonym znakiem równości:

$$3x-6\neq 0$$
$$3x\neq 6 \quad /\div 3$$
$$x\neq 2$$

Interpretujemy otrzymany wynik. Oznacza on, że z dziedziny należy wykluczyć otrzymaną liczbę.

$Df=R\setminus\{2\}$ **Otrzymaliśmy liczbę 2. Dziedziną jest więc zbiór liczb rzeczywistych (R) minus zbiór jednoelementowy, zawierający liczbę 2.**

We wzorze funkcji może pojawić się więcej ograniczeń niż jedno. Każde ograniczenie należy rozpatrzyć osobno. Dziedzina będzie częścią wspólną otrzymanych przedziałów i zbiorów.

Przykład: $f(x)=\sqrt[4]{x-6}+\frac{\sqrt{5x+10}}{x-9}-20$

www.matematykam.pl

$$x-6\geq 0 \qquad 5x+10\geq 0 \qquad x-9\neq 0$$
$$x\geq 6 \qquad 5x\geq -10 \quad /\div 5 \qquad x\neq 9$$
$$x\geq -2$$
$$x\in\langle 6,\ \infty) \qquad x\in\langle -2,\ \infty) \qquad x\in R\setminus\{9\}$$

Część wspólna z dwóch powyższych przedziałów, to przedział od 6 do nieskończoności. Trzecie ograniczenie, to wykluczenie liczby 9, co zapisujemy obok utworzonego przedziału (\9).

$$Df=\langle 6,\ \infty)\setminus\{9\}$$

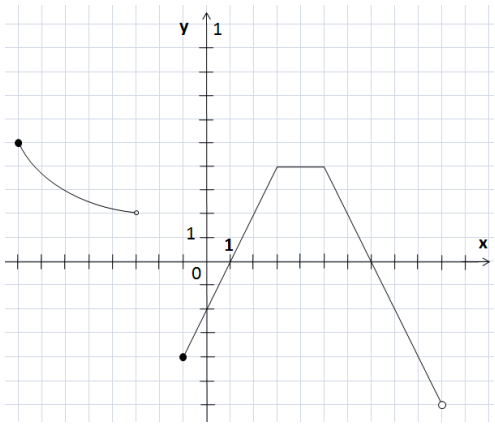
7.4 Obliczanie miejsca zerowego ze wzoru funkcji

Aby obliczyć miejsce zerowe **funkcji należy podstawić za „y" wartość zero i rozwiązać otrzymane równanie. Otrzymana liczba to miejsce zerowe.** W zależności od rodzaju funkcji, możemy otrzymać różne rodzaje równań, co jest przedstawione w rozdziałach dotyczących poszczególnych typów funkcji. Przedstawimy tu jeden przykład, dla funkcji liniowej (następny rozdział).

$$y=2x-4$$ **Podstawiamy za y, wartość 0 i rozwiązujemy równanie.**
$$0=2x-4$$
$$-2x=-4 \quad /\div(-2)$$
$$x=2$$

Miejsce zerowe funkcji: $x=2$

7.5 Odczytywanie własności funkcji z wykresu



Powinniśmy potrafić określić najważniejsze własności:
1 dziedzinę funkcji, 2 zbiór wartości, 3 przedziały monotoniczności, 4 miejsca zerowe, 5 punkty przecięcia z osiami, 6 argumenty, dla których funkcja jest dodatnia/ujemna, 7 argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość, 8 argumenty, dla których funkcja spełnia daną nierówność, 9 sprawdzić czy dany punkt należy do wykresu funkcji, 10 minimum i maksimum. Określanie wymienionych własności przedstawimy na przykładzie zamieszczonym po prawej.

1 Dziedziną funkcji jest przedział lub przedziały w jakich „rozciąga się" wykres wzdłuż osi 0X:

Dziedzina dla rozpatrywanego przykładu, to dwa przedziały: od -8 do -3 oraz od -1 do 10. O kształcie nawiasu decydują kropki na końcach fragmentów wykresu.

$$D = \langle -8,\ -3) \cup \langle -1,\ 10 \rangle$$

2 Zbiór wartości stanowi przedział lub przedziały, w jakich „rozciąga się" wykres wzdłuż osi OY:

Zbiór wartości to jeden przedział. Na wykresie widać, że zbiór wartości to zakres od -6 do 5.

$$ZW = (-6,\ 5\rangle$$

3 Przedziały monotoniczności - zapisujemy przedziały, w których funkcja jest malejąca (jej wykres patrząc od lewej do prawej „idzie" w dół), rosnąca (wykres „idzie w górę) i stała (wykres jest poziomy). Nawiasy dla argumentów granicznych, w których funkcja zmienia swoją monotoniczność są trójkątne:

Zapisujemy przedziały, w których funkcja jest malejąca. Tam gdzie na wykresie kropka jest zakolorowana (przy -8), nawias jest trójkątny, tam gdzie jest pusta (-3 oraz 10), nawias jest okrągły, a tam gdzie funkcja zmienia swoją monotoniczność (5), nawias jest trójkątny.

$f(x)\searrow$ w przedziałach $\langle -8,\ -3)$ i $\langle 5,\ 10)$

Zapisujemy przedział, w którym funkcja jest rosnąca. Przy liczbie -1 nawias jest trójkątny, bo kropka jest zakolorowana. Przy liczbie 3, nawias też jest trójkątny, bo jest to punkt , w którym funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$f(x)\nearrow$ w przedziale $\langle -1,\ 3\rangle$

Zapisujemy przedział, w którym funkcja jest stała. Przy obu liczbach (3 oraz 5) nawias jest trójkątny, bo są to punkty, w których funkcja zmienia swoją monotoniczność.

$f(x)\rightarrow$ w przedziale $\langle 3,\ 5\rangle$

4 Miejsce zerowe to argument (x), dla którego wartość (y) wynosi zero. Określenie miejsca zerowego, sprowadza się do odczytania argumentów (x) w punktach, w których wykres przecina oś odciętych (oś 0X).

www.matematykam.pl

Tu mamy dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = 1 \ \vee \ x_2 = 7$$

5 Punkty przecięcia z osiami - osobno zapisujemy punkty przecięcia z osią 0X i punkt przecięcia z osią 0Y (zawsze jest tylko jeden).Punkty przecięcia z osią 0X znajdują się w miejscach zerowych, opisanych w poprzednim podpunkcie. Punkt przecięcia z osią 0Y znajduje się w miejscu, w którym wykres przecina oś 0Y.

Punkty przecięcia z osią 0X: $(1,\ 0);\ (7,\ 0)$

Punkt przecięcia z osią 0Y: $(0,-2)$

6 Argumenty dla których funkcja jest dodatnia/ujemna

Argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: $f(x) > 0$

Są to przedziały argumentów (x), tych części wykresu, które znajdują się nad osią 0X. Nawiasy przy punktach leżących na osi 0X, będą okrągłe, ponieważ w tych punktach wartość funkcji wynosi zero, a chodzi nam o wartości dodatnie (wyłącznie większe od zera).

Przy liczbie -8 nawias jest trójkątny, ponieważ kropka jest zakolorowana. Przy liczbie -3, nawias jest okrągły, ponieważ kropka jest pusta. Przy liczbach 1 oraz 7 nawiasy są okrągłe, ponieważ są to argumenty punktów, leżących na osi 0X.

$$f(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \langle -8,\ -3) \cup (1,\ 7)$$

Argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: $f(x) < 0$

Są to przedziały argumentów (x), tych części wykresu, które znajdują się pod osią 0X.

$$f(x) < 0 \quad \text{dla } x \in \langle -1,\ 1) \cup (7,\ 10)$$

7 Argumenty dla których funkcja przyjmuje daną wartość. W zależności od podanej wartości, rozwiązanie może być: jednym argumentem, kilkoma argumentami, przedziałem argumentów, jak również może się okazać, że dla danej wartości nie ma rozwiązań. Zilustrujemy to na czterech przykładach:

$f(x) = -5,\ \ f(x) = -2,\ \ f(x) = 4,\ \ f(x) = 6$

Odczytujemy z wykresu argumenty (x), dla których wartości (y) są równe danej liczbie. Można sobie to ułatwić przykładając poziomo linijkę na danej wysokości (czyli dla danej wartości).

Dla wartości -5 istnieje jeden punkt na wykresie o argumencie 8,5.

$f(x) = -5 \quad \text{dla} \quad x = 9{,}5$

Dla wartości -2 istnieją dwa punkty na wykresie, o argumentach 0 oraz 8. Rozwiązaniem jest więc dwuelementowy zbiór liczb.

$f(x) = -2 \quad \text{dla} \quad x \in \{0;\ 8\}$

Dla wartości 4 istnieje przedział argumentów (od 3 do 5) łącznie z tymi wartościami granicznymi (dlatego nawiasy są trójkątne) oraz dodatkowo argument -7,5. Rozwiązaniem jest więc suma przedziału i jednoelementowego zbioru.

$f(x) = 4 \quad \text{dla} \quad x \in \langle 3,\ 5\rangle \cup \{-7{,}5\}$

Na wykresie nie ma żadnego punktu o wartości 6, dlatego piszemy: „brak argumentów".

$f(x) = 6$ Brak argumentów

8 Argumenty dla których funkcja spełnia daną nierówność . Postępujemy podobnie jak w wypadku określania argumentów, dla których funkcja jest dodatnia lub ujemna. Punktem odniesienia nie jest już jednak oś 0X, ale pozioma prosta znajdująca się na wysokości zgodnej z wartością podaną w nierówności. Należy zwrócić ponadto uwagę na znak nierówności. Co mamy na myśli, przedstawimy porównując dwie bardzo podobne nierówności: $f(x) < -2,\ \ f(x) \le -2$

Pomocniczo możemy narysować poziomą prostą na wysokości -2 lub przyłożyć w tym miejscu linijkę.

Nawiasy dla punktów, przy których są kropki (-1 oraz 10), są zawsze zgodne z tym, czy są one zakolorowane lub nie. W przypadku argumentów granicznych (0 oraz 8), nawias zależny jest od znaku nierówności. Dla znaku „mniejsze" nawiasy są okrągłe, dla „mniejsze lub równe" nawiasy są trójkątne.

$f(x) < -2 \quad \text{dla } x \in \langle -1,\ 0) \cup (8,\ 10)$

$f(x) \le -2 \quad \text{dla } x \in \langle -1,\ 0\rangle \cup \langle 8,\ 10)$

9 Sprawdzenie czy dany punkt należy do wykresu funkcji. Wystarczy odnaleźć dany punkt w układzie współrzędnych i określić czy leży na liniach wykresu, czy nie.

Przykłady:

Punkty: A=(-2, 4), B=(6, 2)

Punkt A nie należy do wykresu funkcji.

Punkt B należy do wykresu funkcji.

10 Minimum i maksimum. Minimalną wartość funkcji oznaczamy najczęściej: $f(x)_{min}$ lub y_{min}. Maksymalną wartości oznaczamy: $f(x)_{max}$ lub y_{max}. Wartość maksymalna to wartość (y) najwyżej leżącego punktu wykresu, a minimalna punktu leżącego najniżej. Dodatkowo, oprócz samej wartości wypada podać argument (x) lub przedział argumentów, dla odczytanej wartości. Jeżeli maksimum lub minimum funkcji wypada w punkcie, w którym znajduje się pusta kropka, minimum lub maksimum nie istnieje.

W najniżej położonym punkcie wykresu znajduje się pusta kropka. Dlatego brak minimum funkcji.

Minimum funkcji: brak.

Najwyżej położony punkt wykresu ma wartość 5 dla argumentu (x) równego -8.

Maksimum funkcji: $f(x)_{max} = 5$ dla $x = -8$

www.matematykam.pl

7.6 Symetria punktu w układzie współrzędnych

- względem osi 0X - współrzędna „y" zmienia znak na przeciwny („x" się nie zmienia).

- względem osi 0Y - współrzędna „x" zmienia znak na przeciwny („y" się nie zmienia).

- względem początku układu, czyli punktu (0,0) - obie współrzędne punktu zmieniają znak.

Przykład: A = (-2, 5).

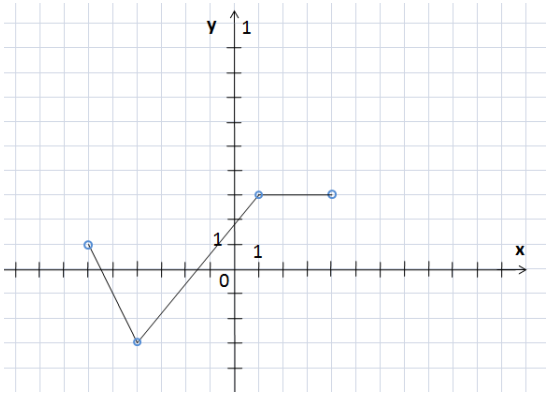
- względem osi 0X: A' = (-2, -5)
- względem osi 0Y: A' = (2, 5)
- względem początku układu, czyli punktu (0,0): A' = (2, -5)

7.7 Transformacje wykresu funkcji

Rodzaje transformacji: **przesunięcie o wektor, symetria względem osi 0X, symetria względem osi 0Y, symetria względem początku układu współrzędnych.**

Niezależnie od rodzaju transformacji, który mamy wykonać, skupiamy się na punktach kluczowych dla danego wykresu (punkty „zgięcia", końce funkcji). Posłużymy się przykładowym wykresem. Kluczowe punkty są na nim zaznaczone w niebieskich kółkach.

W trakcie każdej transformacji przenosimy tylko punkty kluczowe, które następnie łączymy liniami.

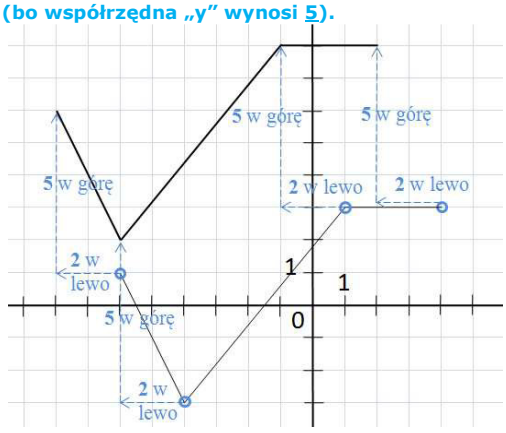


Przesunięcie o wektor

Przesuwamy wszystkie punkty kluczowe o podane wartości w poziomie i pionie, a następnie je łączymy.

Przykład: Przesuniemy podany wykres funkcji o wektor : [-2, 5].

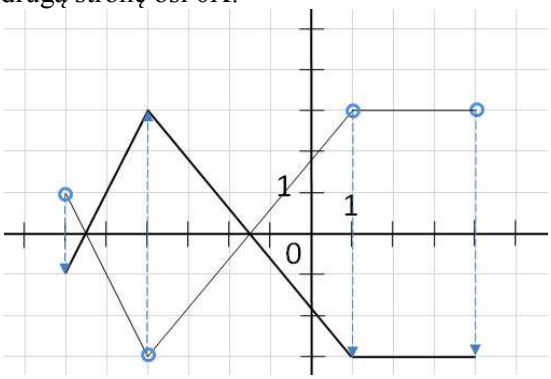
Każdy punkt musimy przesunąć o 2 jednostki w lewo (bo współrzędna „x" wynosi -2) i o 5 jednostek w górę (bo współrzędna „y" wynosi 5).



Symetria względem osi 0X **- f(x)**

Mając do czynienia z podejściem graficznym, **punkt symetryczny do danego względem jednej z osi układu, znajduje się dokładnie po drugiej stronie osi (jak lustrzane odbicie).**

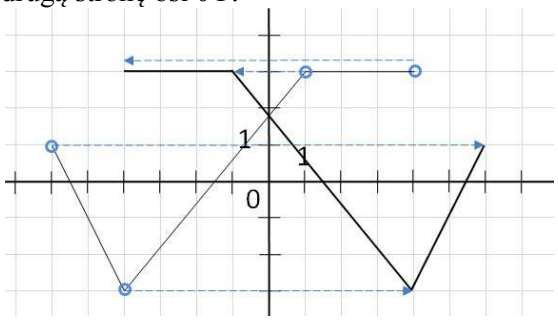
Przenosimy więc wszystkie kluczowe punkty na drugą stronę osi 0X.



www.matematykam.pl

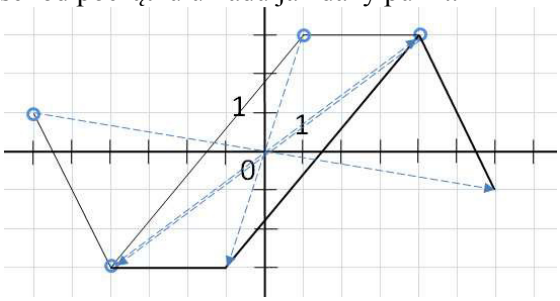
Symetria względem osi 0Y **f(-x)**

Wygląda tak samo jak symetria względem osi 0X, z tą różnicą, że dane punkty przenosimy na drugą stronę osi 0Y.



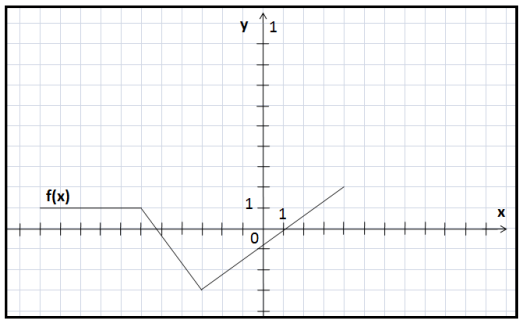
Symetria względem początku układu współrzędnych **- f(-x)**

Punkt symetryczny do danego względem początku układu znajdziemy, rysując prostą (lub przykładając linijkę), przechodzącą przez dany punkt i początek układu współrzędnych. Punkt symetryczny będzie znajdował się na tej prostej, po drugiej stronie, w takiej samej odległości od początku układu jak dany punkt.



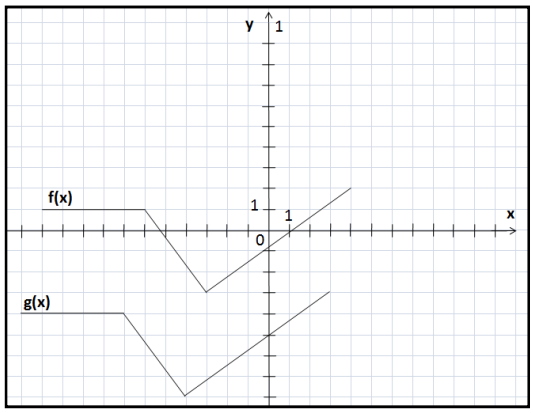
7.8 Rysowanie funkcji w postaci f(x –a) + b

To podejście jest wykorzystywane, gdy mamy **wykres funkcji f(x),** a następnie poprzez jej przesunięcie w układzie współrzędnych, **chcemy otrzymać wykres f(x – a) +b.** W rzeczywistości przekształcenie, które mamy wykonać **to przesunięcie funkcji f(x) o wektor: [a, b].**



Przykład:

Narysujemy wykres funkcji: g(x) = f(x + 1) – 5. Narysowanie wykresu funkcji g(x), sprowadza się do przesunięcia wykresu funkcji f(x) o wektor: [-1, -5], czyli o 1 w lewo i 5 w dół.



UWAGA: pierwszą współrzędną zapisujemy z przeciwnym znakiem!
We wzorze mamy zapisane: +1, dlatego pierwsza współrzędna będzie wynosić -1.

8. GEOMETRIA ANALITYCZNA (f. liniowa, równanie okręgu)

8.1 Postaci funkcji liniowej

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: GEOMETRIA ANALITYCZNA):
Postać ogólna:
$Ax + By + C = 0$
Postać kierunkowa:
$y = ax + b$

www.matematykam.pl

We wzorach: **A, B, C, a, b** to współczynniki liczbowe.
Ponadto **a** nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.
Przykład: postać ogólna – 3x - 2y + 1 = 0; postać kierunkowa: y = -2x + 6

Zamiana jednej postaci na drugą:

postać ogólna – postać kierunkowa

Przenosimy na prawo wyrażenie z „x" oraz liczbę. Gdy przed „y" znajduje się jakaś liczba, należy jeszcze otrzymane równanie podzielić przez tę liczbę.

Przykład:

$$-6x + 2y + 10 = 0$$

Przenosimy wyrażenie z „x" oraz liczbę na prawo (pamiętajmy o zmianie znaku).

Dzielimy przez 2.

$$2y = 6x - 10 \quad /\div 2$$
$$y = 3x - 5$$

postać kierunkowa – postać ogólna

Przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę i zapisujemy w określonej kolejności wymaganej dla postaci ogólnej (wyrażenie z „x" – wyrażenie z „y" – liczba).

Przykład:

$$y = -2x + 6$$

Przenosimy wyrażenia -2x oraz 6 na lewo (pamiętajmy o zmianie znaków). Po prawej nie zostanie nic, więc zapisujemy zero.

$$2x + y - 6 = 0$$

8.2 Wykres i własności funkcji liniowej

❖ ***Wykres***

Wykresem funkcji liniowej jest **prosta**. Szczególnym przypadkiem funkcji liniowej jest funkcja w postaci: y = ax (współczynnik „b" wynosi 0), której wykres zawsze przechodzi przez początek układu współrzędnych – punkt (0,0).

Aby narysować wykres funkcji liniowej, potrzebujemy trzech punktów, obliczanych ze wzoru. Zaznaczamy je w układzie współrzędnych i łączymy prostą.

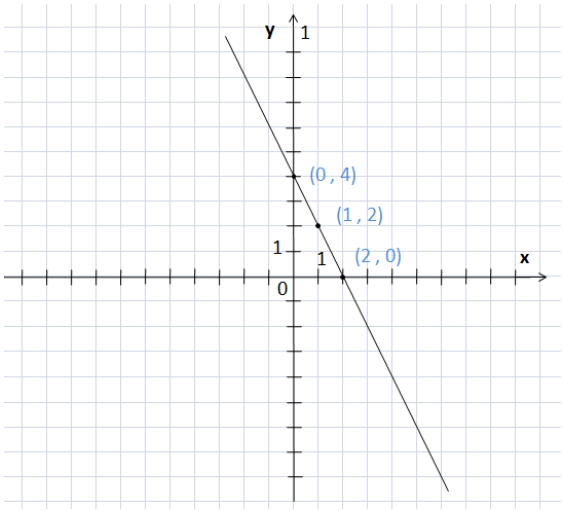
Przykład: $y = -2x + 4$

Wybieramy sami argumenty (x), najlepiej jak najmniejsze (0,1,2).

x	0	1	2
y	4	2	0

Podstawiamy kolejno wybrane przez nas argumenty (1, 2, 3) do wzoru i obliczamy wartości (y):

y = -2x + 4
y = -2·0+4=4
y = -2·1+4=2
y = -2·2+4=0



❖ ***Własności (określane na podstawie wzoru)***

I. Monotoniczność określamy za pomocą **współczynnika kierunkowego funkcji (a).**

- Gdy współczynnik kierunkowy (a) jest dodatni (a > 0), funkcja jest **rosnąca.**
Przykład: $y = 2x - 3$

- Gdy współczynnik kierunkowy (a) jest ujemny (a < 0), funkcja jest **malejąca.**
Przykład: $y = -3x+4$

- Gdy współczynnik kierunkowy (a) wynosi 0, funkcja jest **stała.**
Przykład: $y = 4$

II. Miejsce zerowe – aby obliczyć miejsce zerowe, za „y" podstawiamy zero, co przedstawiliśmy już na przykładzie funkcji liniowej w podrozdziale 7.4.

III. Punkty przecięcia z osiami

Mając do dyspozycji wzór funkcji, szukamy:

- **punktu przecięcia z osią 0X -** podstawiając za **y** wartość 0 i z tak powstałego równania liczymy x (tak jak miejsce zerowe, bo graficznie miejsce zerowe jest w punkcie przecięcia z osią x).

Przykład: y = 4x + 12

$$0 = 4x + 12$$
$$-4x = 12$$
$$x = -3$$

Punkt przecięcia z osią x ma więc współrzędne: **(-3,0).**

www.matematykam.pl

- punktu przecięcia z osią 0Y – podstawiamy za *x* wartość 0 i liczymy z powstałego równania *y*.

Przykład: y = 4x + 12

$y = 4 \cdot 0 + 12 = 12$ Punkt przecięcia z osią y ma więc współrzędne: **(0,12).**

IV. Sprawdzenie czy dany punkt należy do wykresu funkcji. Aby sprawdzić czy dany punkt należy do wykresu funkcji, należy podstawić jego współrzędne do wzoru. Jeżeli lewa strona okaże się równa prawej, to dany punkt należy do wykresu funkcji. Przykład: Sprawdzimy czy punkty: A = (1,2); B = (-2,3) należą do wykresu funkcji: y = 3x-1

$2 = 3 \cdot 1 - 1$ $3 = 3 \cdot (-2) - 1$
$2 = 2$ $3 \neq -7$
L = P L ≠ P

Punkt A należy do wykresu funkcji, a punkt B nie należy.

8.3 Równania prostej

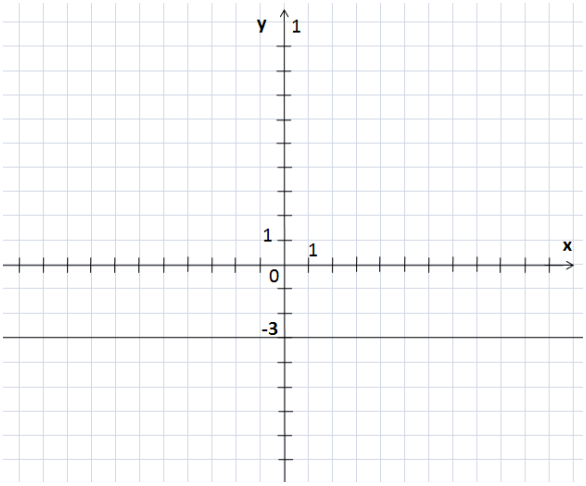
Oprócz „tradycyjnych" prostych, będących wykresem funkcji liniowej, którego rysowanie przedstawiliśmy w poprzednim podrozdziale, istnieją jeszcze dwa typy prostych.

Pierwsza z nich jest „specyficznym" przypadkiem funkcji liniowej – jest to **prosta pozioma**, której wzór można zapisać:

y = c – gdzie c jest wartością liczbową.

Przykład: $y = -3$

Wykresem funkcji liniowej tego rodzaju jest prosta na danej wysokości (tu na wysokości: -3).

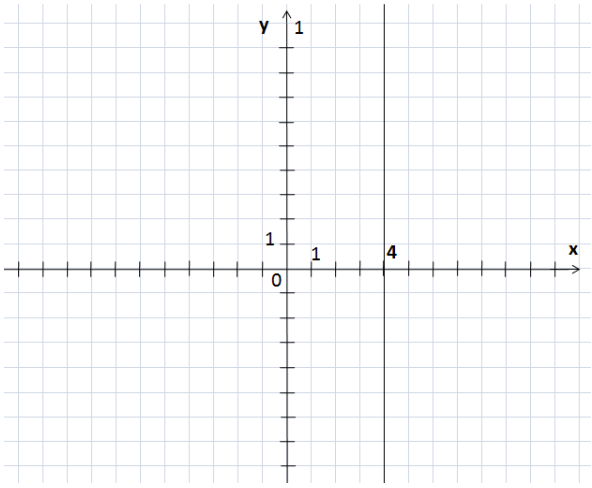


Druga prosta nie jest nawet funkcją – jest to **prosta pionowa**, której wzór można zapisać:

x = c, gdzie c jest wartością liczbową.

Przykład: $x = 4$

Wykresem takiego przyporządkowania jest prosta, przechodząca przez dany argument na osi 0X (tutaj argument: 4).



8.4 Wzajemne położenie prostych (warunek równoległości i prostopadłości)

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: GEOMETRIA ANALITYCZNA):

Dwie proste o równaniach kierunkowych

$y = a_1x + b_1 \quad y = a_2x + b_2$

spełniają jeden z następujących warunków:

- są równoległe, gdy $a_1 = a_2$
- są prostopadłe, gdy $a_1a_2 = -1$

UWAGA: Na karcie wzorów maturalnych są jeszcze umieszczone warunki prostopadłości i równoległości dla postaci ogólnej. Zalecamy jednak skupić się na warunkach dla postaci kierunkowej, przedstawionych po lewej i które omawiamy w dalszej części podrozdziału.

W zadaniach, w których musimy określić wzajemne położenie prostych, możemy się spotkać z dwiema sytuacjami:

www.matematykam.pl

I Żadna prosta nie jest pozioma ani pionowa (y = c, albo x = c – podrozdział 8.3).

Aby określić wzajemne płożenie prostych, sprawdzamy po kolei, ***cztery możliwe ewentualności***:

1) Czy proste są równoległe?

W ramce powyżej przedstawiony jest warunek równoległości prostych. Wynika z niego, że dwie proste są **równoległe**, gdy ich wzory mają **ten sam współczynnik kierunkowy (a).**

Przykład:

l: $y = -2x + 4$

k: $y = -2x - 6$

Proste k oraz l są równoległe (l || k).

2) Czy proste się pokrywają?

Dwie proste **się pokrywają**, gdy ich **wzory w postaci kierunkowej są identyczne:**

Przykład:

l: $y = -2x + 5$

k: $y = -2x + 5$

Proste k oraz l się pokrywają.

3) Czy proste przecinają się pod kątem prostym?

Warunek prostopadłości na karcie wzorów, jest przedstawiony: $a_1 a_2 = -1$. Bardziej „prozaicznie": dwie proste są **prostopadłe**, gdy **ich współczynniki kierunkowe mają przeciwne znaki i są w stosunku do siebie liczbami odwrotnymi.**

Przykład:

l: $y = -5x - 3$

k: $y = \frac{1}{5}x - 1$

Proste k oraz l są prostopadłe ($l \perp k$).

4) Czy przecinają się pod innym kątem?

Tej ewentualności nie trzeba w ogóle rozpatrywać. Proste przecinają się pod kątem innym niż prosty, gdy nie zachodzi żadna z trzech pierwszych ewentualności.

Przykład:

l: $y = 4x - 3$

k: $y = 7x + 5$

Proste nie są równoległe, nie pokrywają się ani nie są prostopadłe. W związku z tym muszą się przecinać w jednym punkcie, pod katem innym niż prosty.

Proste k oraz l przecinają się w jednym punkcie pod kątem innym niż prosty.

II Przynajmniej jedna z dwóch prostych jest pozioma lub pionowa (y = c, albo x = c – 8.3).

Wystarczy pamiętać, że prosta:

- **w postaci y = c jest pozioma** (np. y = 3);
- **w postaci x = c jest pionowa** (np. x = -2).

W związku z powyższym:

1) Proste pozioma i pionowa są prostopadłe (np. x = 5 oraz y = 7).

2) Dwie proste poziome są równoległe (np. y = 3 oraz y = -2), jak również dwie proste pionowe są równoległe (np. x = -3 oraz x = 6).

3) Gdy mamy prostą poziomą lub pionową oraz „standardową" prostą: y = ax + b (np. x = -4 oraz y = 2x + 3), dane proste przecinają się w jednym punkcie pod kątem innym niż prosty.

8.5 Punkt wspólny dwóch prostych

Współrzędne punktu wspólnego dwóch prostych (punktu przecięcia prostych) obliczymy rozwiązując układ równań złożony z tych prostych.

$$\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = -3x + 9 \end{cases}$$

Wybraliśmy metodę przeciwnych współczynników.

Metody rozwiązywania układu równań na stronie: **www.matematykam.pl: PODSTAWY → układy równań**

$$\begin{cases} -4x + y = 2 \quad /\cdot(-1) \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - y = -2 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \quad +$$

$$4x - y + 3x + y = -2 + 9$$

$$7x = 7 \quad /\div 7$$

$$x = 1$$

$$3 \cdot 1 + y = 9$$

$$3 + y = 9$$

$$y = 9 - 3$$

$$y = 6$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

www.matematykam.pl

Punkt wspólny prostych: (1, 6).

8.6 Określanie wzoru prostej.

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: GEOMETRIA ANALITYCZNA):

Równanie kierunkowe prostej o współczynniku *a*, która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

❖ ***Mając dany współczynnik kierunkowy i punkt lub mając dane dwa punkty.***

Korzystamy ze wzorów z tablic matematycznych (ramka ze wzorami na poprzedniej stronie).

Mając dany współczynnik kierunkowy i punkt

Korzystamy z pierwszego wzoru. Przykład:
Określimy wzór prostej o współczynniku kierunkowym 2, przechodzącej przez punkt (3, 7).
dane: $a = 2$, $x_0 = 3$, $y_0 = 7$

$$y = a(x - x_0) + y_0$$
$$y = 2(x - 3) + 7$$
$$y = 2x - 6 + 7$$
$$y = 2x + 1$$

Mając dane dwa punkty

Korzystamy z drugiego wzoru. Przykład: Określimy wzór prostej przechodzącej przez punkty: (-2, 1) oraz (3, 16).
dane: $x_A = -2$, $y_A = 1$, $x_B = 3$, $y_B = 16$

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$
$$(y-1)(3-(-2)) - (16-1)(x-(-2)) = 0$$
$$(y-1)(3+2) - 15(x+2) = 0$$
$$(y-1)\cdot 5 - 15x - 30 = 0$$
$$5y - 5 - 15x - 30 = 0$$
$$5y - 15x - 35 = 0$$
$$5y = 15x + 35$$
$$y = 3x + 7$$

UWAGA: Mając dane dwa punkty, możemy obliczyć wzór prostej w oparciu o pierwszy wzór. Najpierw musimy jednak obliczyć współczynnik kierunkowy, korzystając z dodatkowego wzoru. Pamiętajmy, że nie jest on zamieszczony w tablicach matematycznych, dostępnych podczas matury:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

❖ ***Mając dany wzór prostej, do której szukana prosta jest prostopadła lub równoległa oraz jeden punkt.***

Przedstawimy na przykładzie: określimy wzór prostej prostopadłej do prostej k: $y = 2x - 4$, jeżeli przechodzi przez punkt A = (-2, 6)

I. Korzystamy tutaj z warunku równoległości lub prostopadłości (podr.8.4), aby ustalić wartość współczynnika kierunkowego (a).

Szukana prosta ma być prostopadła do prostej: y = 2x -4. Z warunku prostopadłości wynika, że współczynnik kierunkowy szukanej prostej ma być liczbą jednocześnie odwrotną i przeciwną do liczby 2, czyli:

$$a = -\frac{1}{2}$$

II. Korzystamy ze wzoru:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$
$$y = -\frac{1}{2}(x + 2) + 6$$
$$y = -\frac{1}{2}x - 1 + 6$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

www.matematykam.pl

8.7 Zadania z parametrem

❖ ***Zadania związane z monotonicznością.***

Może tu pojawić się polecenie o zbadanie monotoniczności funkcji ze względu na dany parametr (jest to zmienna oznaczona małą literą alfabetu np. m, p …) lub bardziej konkretne pytanie: dla jakiej wartości parametru dana funkcja jest rosnąca/malejąca/stała.

Przypominamy: funkcja jest **rosnąca**, gdy **a > 0**; **malejąca**, gdy **a < 0**; **stała**, gdy **a = 0**.

Obliczanie wartości parametru przedstawimy na przykładzie:

Zbadamy monotoniczność funkcji: $y = (2m - 6)x - 4$, w zależności od wartości parametru m.

UWAGA: Współczynnik kierunkowy **a**, to całe wyrażenie „przed x", czyli: $2m - 6$.

Gdy w zadaniu pojawia się zwrot „zbadaj monotoniczność" musimy rozważyć wszystkie trzy możliwości:

Dla jakiej wartości parametru m funkcja jest rosnąca?
Skoro funkcja jest **rosnąca**, gdy **a > 0,** zapisujemy:

$$2m-6>0$$
$$2m>6 \quad /\div 2$$
$$m>3$$
$$m\in(3,\ \infty)$$
$$f(x)\nearrow \text{ dla } m\in(3,\ \infty)$$

Dla jakiej wartości parametru m funkcja jest malejąca?
Skoro funkcja jest **malejąca**, gdy **„a" < 0,** zapisujemy:

$$2m-6<0$$
$$2m<6 \quad /\div 2$$
$$m<3$$
$$m\in(-\infty,\ 3)$$
$$f(x)\searrow \text{ dla } m\in(-\infty,\ 3)$$

Dla jakiej wartości parametru m funkcja jest stała?
Skoro funkcja jest **stała**, gdy **a = 0,** zapisujemy:

$$2m-6=0$$
$$2m=6 \quad /\div 2$$
$$m=3$$
$$f(x)\rightarrow \text{ dla } m=3$$

UWAGA: Możemy natrafić na bardziej „złośliwe" przykłady. Przykład:

$$2mx+8x-2y+12=0$$

Po pierwsze, funkcję należy przekształcić do postaci kierunkowej.

$$-2y=-2mx-8x-12 \quad /\div(-2)$$
$$y=mx+4x+6$$
$$y=(m+4)x+6$$

Mamy dwa wyrażenia z „x". Aby określić współczynnik kierunkowy (a), należy uzyskać tylko jedno wyrażenie z „x". W tym celu należy wystawić „x" przed nawias (tutaj zapisujemy „x" za nawiasem).

Teraz możemy określić „a" – **(m + 4)** i postępować dalej, tak jak przedstawiliśmy to wcześniej.

❖ ***Zadania związane z warunkiem prostopadłości i równoległości.***

Tu mamy do czynienia z dwiema prostymi. Odpowiadamy na pytanie: dla jakiej wartości parametru dane proste są równoległe/prostopadłe. Przykład: Dla jakiej wartości parametru m, proste l: y = (m-1)x + 4 oraz k: y = -6x - 7, są równoległe, a dla jakiej prostopadłe?

Warunek równoległości dla postaci kierunkowej mówi, że **współczynniki kierunkowe prostych muszą być równe.** Zapisujemy więc:

$$m-1=-6$$
$$m=-6+1$$
$$m=-5$$

Warunek prostopadłości dla postaci kierunkowej mówi, że **współczynniki kierunkowe prostych muszą mieć przeciwne znaki i być w stosunku do siebie liczbami odwrotnymi.** Zapisujemy więc:

Współczynnik a jednej prostej (m – 1) musi być równy współczynnikowi, jaki powstanie po obróceniu i zmianie znaku współczynnika drugiej prostej (-6).

$$m-1=\frac{1}{6}$$
$$m=\frac{1}{6}+1=1\frac{1}{6}$$

www.matematykam.pl

Odpowiedź: Proste l oraz k są równoległe dla m = -5, a prostopadłe dla $m=1\frac{1}{6}$.

8.8 Wzory: długość odcinka, środek odcinka, odległość punktu od prostej

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: GEOMETRIA ANALITYCZNA):

Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka:

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Odległość punktu $P=(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu: $Ax+By+C=0$ jest dana wzorem:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

❖ ***Długość odcinka***

Obliczymy długość odcinka o końcach: A = (-9, 1), B = (3, -4):

Do wzoru na długość odcinka podstawiamy współrzędne obu punktów: $x_A = -9$, $x_B = 3$, $y_A = 1$, $y_B = -4$:

$$|AB| = \sqrt{(3-(-9))^2 + ((-4)-1)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{(3+9)^2 + (-4-1)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{12^2 + (-5)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{144+25}$$
$$|AB| = \sqrt{169}$$
$$|AB| = 13$$

❖ ***Współrzędne środka odcinka***

Obliczymy współrzędne środka odcinka o końcach: A = (-2, 9), B = (6, 3).

Podstawiamy współrzędne obu punktów do wzoru na współrzędne środka odcinka: $x_A = -2$, $x_B = 6$, $y_A = 9$, $y_B = 3$

$$S = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{9+3}{2}\right)$$
$$S = \left(\frac{4}{2}, \frac{12}{2}\right)$$
$$S = (2,\ 6)$$

❖ ***Odległość punktu od prostej***

Aby obliczyć odległość punktu od prostej, korzystając ze wzoru, prosta musi być zapisana za pomocą postaci ogólnej (podrozdział: 8.1). Korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

A, B oraz C, to współczynniki danej prostej z jej postaci ogólnej.
x_0 oraz y_0 to współrzędne danego punktu.

www.matematykam.pl

Przykład: $k: \ 4x - 2y - 16 = 0, \quad A = (1,\ 4)$

Podstawiamy współczynniki prostej i współrzędne punktu do wzoru.

$$d = \frac{|4\cdot 1 + (-2)\cdot 4 - 16|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{|4-8-16|}{\sqrt{16+4}} = \frac{|-20|}{\sqrt{20}} = \frac{20}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

Musimy usunąć niewymierność z mianownika.

8.9 Równanie okręgu

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: GEOMETRIA ANALITYCZNA):
Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

lub: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ gdy $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$

❖ ***Postać kanoniczna***

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Środek okręgu ma współrzędne: $S = (a,\ b)$

Promień okręgu okręgu jest równy **r**. Uważajmy jednak, bo wartość po prawej stronie równania okręgu, to nie promień sam w sobie, ale promień podniesiony do kwadratu.

Przykład: $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$

$S = (2,\ -4)$ **UWAGA: Znaki obu współrzędnych są przeciwne, do znaków wartości znajdujących się we wzorze!**

$r^2 = 9$
$r = \sqrt{9}$
$r = 3$

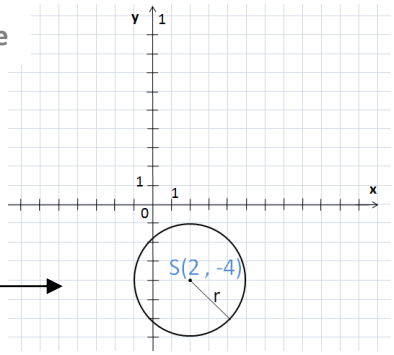
Po prawej stronie znajduje się wartość 9, co oznacza, że promień do kwadratu wynosi 9. Aby uzyskać promień, należy więc tę wartość spierwiastkować.

❖ ***Wykres***

W pierwszej kolejność zaznaczamy w układzie współrzędnych **środek okręgu**.

Następnie rozwieramy nóżki cyrkla zgodnie z wartością promienia (tu na odległość 3 jednostek) i szkicujemy okrąg.

Dla rozpatrywanego przykładu →



❖ ***Postać ogólna***

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ - gdy mamy z nią do czynienia, w pierwszej kolejności przekształcamy równanie do postaci kanonicznej, którą przedstawiliśmy wcześniej.

Przykład: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

Zamiana na postać kanoniczną

Aby zapisać dane równanie za pomocą postaci kanonicznej, należy obliczyć trzy wielkości występujące w tej postaci, czyli **a**, **b** oraz **r**.

1) W pierwszej kolejności obliczamy a i b zgodnie z równościami:

-2a = liczba „przed" x -2b = liczba „przed" y

Dla przykładu:

$-2a = -6 \quad /\div(-2)$ $\qquad -2b = 4 \quad /\div(-2)$

$a = 3$ $\qquad b = -2$

2) Obliczamy r^2 zgodnie ze wzorem:

$r^2 = a^2 + b^2 - c$

Dla przykładu:

$r^2 = 3^2 + (-2)^2 - 4 = 9 + 4 - 4 = 9$

$r^2 = 9$

3) Zapisujemy wzór za pomocą postaci kanonicznej: podstawiamy a, b oraz r do wzoru.

Dla przykładu: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

www.matematykam.pl

9. FUNKCJA KWADRATOWA (równania i nierówności kwadratowe)

9.1 Postać ogólna (wyróżnik, miejsca zerowe, wierzchołek paraboli)

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: FUNKCJA KWADRATOWA):

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in R$

Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac$

Miejsca zerowe:

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych,

- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

UWAGA: Zazwyczaj jedno miejsce zerowe jest oznaczane: x_0

- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Wierzchołek wykresu funkcji kwadratowej (paraboli): $p = \frac{-b}{2a}$ $\quad q = \frac{-\Delta}{4a}$

Przykład funkcji kwadratowej zapisanej za pomocą postaci ogólnej: $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

Współczynniki a, b i c danej funkcji wynoszą: a = -1, b = 3, c = 4.

Wyróżnik, miejsca zerowe oraz współrzędne wierzchołka wykresu funkcji obliczamy, korzystając z przedstawionych w ramce wzorów. Dla przedstawionego przykładu:

Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 9 + 16 = 25$

Miejsca zerowe: **Δ > 0, dlatego mamy dwa miejsca zerowe:**

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\cdot(-1)} = \frac{-3+5}{-2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\cdot(-1)} = \frac{-3-5}{-2} = 4$$

Wierzchołek paraboli:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2\cdot(-1)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \qquad q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-25}{4\cdot(-1)} = \frac{-25}{-4} = 6\frac{1}{4}$$

9.2 Postaci funkcji kwadratowej

Oprócz postaci ogólnej, przedstawionej w poprzednim podrozdziale, istnieją jeszcze dwie postaci funkcji kwadratowej.

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: FUNKCJA KWADRATOWA):

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej: $f(x) = a(x-p)^2 + q$

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

UWAGA: Wzory na **p**, **q**, **x_1** oraz **x_2** są zamieszczone w poprzedniej ramce (rozdział 9.1).

Ponadto gdy funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe, postać iloczynowa ma wzór: $f(x) = a(x-x_0)^2$ (tego wzoru nie znajdziemy jednak na karcie wzorów maturalnych), a gdy funkcja nie ma miejsc zerowych, to nie możemy jej zapisać za pomocą postaci iloczynowej.

❖ ***Zamiana jednej postaci na inną***

www.matematykam.pl

Z postaci ogólnej na:

- postać iloczynową

Obliczamy miejsca zerowe i podstawiamy ich wartości oraz współczynnik „a" do odpowiedniej formy postaci iloczynowej.

Przykład: $y = 3x^2 + 6x - 9$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\cdot 3\cdot(-9) = 144$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{144}}{2\cdot 3} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{144}}{2\cdot 3} = -3$$

Ponieważ mamy dwa miejsca zerowe, wybieramy pierwszą formę wzoru postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$f(x) = 3(x-1)(x-(-3))$$

$$f(x) = 3(x-1)(x+3)$$

- postać kanoniczną

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli **(p i q)**, a następnie podstawiamy otrzymane wartości oraz współczynnik „a" do wzoru postaci kanonicznej.

Przykład: $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-5) = -4$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\cdot(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-4)}{4\cdot(-1)} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

$$f(x) = -1(x-2)^2 + (-1)$$

$$f(x) = -(x-2)^2 - 1$$

Zamiana na postać ogólną:

Aby zamienić postać kanoniczną lub iloczynową na ogólną, należy wykonać wszystkie działania i uszeregować wyrażenia w odpowiedniej kolejności (wyrażenia z x^2, wyrażenie z x, liczba).

Przykłady: $f(x) = 3(x-4)^2$ - zamienimy na postać ogólną:

$$f(x) = 3(x-4)^2 = 3(x^2 - 8x + 16)$$

$$f(x) = 3x^2 - 24x + 48$$

Zamiana z postaci kanonicznej na iloczynową (i odwrotnie).

Nie wykonamy bezpośredniej zamiany między tymi dwiema postaciami. Musimy w pierwszej kolejności otrzymać postać ogólną, a następnie z ogólnej dokonać zamiany na postać iloczynową/kanoniczną, tak jak przedstawiliśmy to wcześniej.

9.3 Wykres funkcji kwadratowej (parabola)

Istnieją dwa sposoby rysowania dokładnego wykresu funkcji.

SPOSÓB I. W oparciu o kilka kluczowych punktów.

Potrzebujemy pięciu punktów:

1) wierzchołek paraboli,

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych),

3) parę dodatkowych punktów – minimum dwa – jeden dla jakiegoś argumentu położonego na lewo od miejsc zerowych, drugi położony na prawo.

UWAGA: Gdy funkcja nie ma miejsc zerowych lub istnieje tylko jedno miejsce zerowe, potrzebujemy minimum dwóch punktów na lewo od wierzchołka i dwóch punktów na prawo.

www.matematykam.pl

Bezpośrednio, wszystkie wymienione elementy możemy uzyskać z postaci ogólnej. Pozostałe postaci (iloczynowa i kanoniczna) mają też pewne zalety, jednak i tak konieczna okazuje się zamiana na postać ogólną, co przedstawimy w dalszej części podrozdziału.

Następnie nanosimy punkty w układzie współrzędnych i łączymy linią w kształcie paraboli.

Przykład: $y = -x^2 - 2x + 8$

1) Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 8 = 36$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2\cdot(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4\cdot(-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$W = (-1,\ 9)$$

2) Obliczamy współrzędne punktów przecięcia z osią 0X (wyróżnik jest dodatni, więc mamy dwa miejsca zerowe):

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\cdot(-1)} = \frac{2+6}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\cdot(-1)} = \frac{2-6}{-2} = 2$$

Punkty przecięcia z osią 0X:

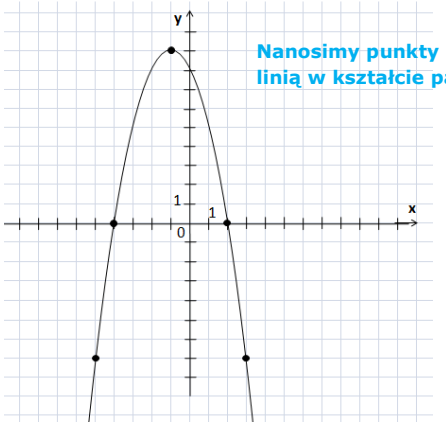
(-4, 0); (2, 0)

3) Obliczamy dwa dodatkowe punkty:
- jeden na lewo od miejsc zerowych - wybraliśmy argument -5;
- drugi na prawo od miejsc zerowych - wybraliśmy argument 3.

$$y = -(-5)^2 - 2\cdot(-5) + 8 = -7$$

$$y = -3^2 - 2\cdot 3 + 8 = -7$$

Współrzędne punktów: (3, -7), (-5, -7)



Nanosimy punkty i łączymy linią w kształcie paraboli.

Gdy mamy na wstępie podaną postać iloczynową albo kanoniczną:

Postać iloczynowa- dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów. **Różnice:**

1) wierzchołek paraboli. Współrzędnych wierzchołka nie obliczymy bezpośrednio z postaci iloczynowej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie korzystając z tej postaci, obliczamy współrzędne wierzchołka, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych).

Nie musimy ich obliczać! Wystarczy je odczytać bezpośrednio z wzoru w postaci iloczynowej.

Przykład:

$$y = 2(x-1)(x+3)$$

UWAGA – liczby zapisane w nawiasach to miejsca zerowe ale ze zmienionym znakiem! $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

Punkty przecięcia z osią 0X: (1, 0); (-3, 0)

Postać kanoniczna - dokładny wykres paraboli uzyskujemy w ten sam sposób. Potrzebujemy tych samych kluczowych punktów. **Różnice:**

1) wierzchołek paraboli. Nie obliczamy współrzędnych wierzchołka funkcji kwadratowej. Można je bezpośrednio odczytać ze wzoru:

Przykład:

$$y = 2(x+5)^2 + 2$$

UWAGA –współrzędna „p" będzie miała przeciwny znak do liczby zapisanej w nawiasie, a znak „q" się nie zmienia: p = -5, q = 2.

W=(-5, 2)

2) punkty przecięcia z osią 0X (punkty dla miejsc zerowych).

Miejsc zerowych nie obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej. W tym celu musimy zapisać wzór funkcji za pomocą postaci ogólnej, a następnie korzystając z tej postaci, obliczamy miejsca zerowe, tak jak zostało to wcześniej przedstawione.

www.matematykam.pl

SPOSÓB II. Poprzez przesuwanie wykresu prostszej funkcji (tylko dla **postaci kanonicznej**).

Przykład: $y = -2(x+1)^2 - 3$

1) Rysujemy wykres prostszej funkcji (pozbawionej współrzędnych wierzchołka).

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$

$$y = -2x^2$$

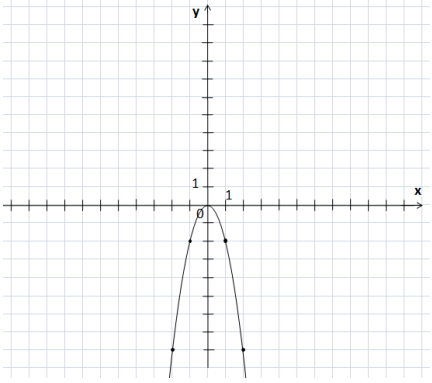
Wykres funkcji kwadratowej składający się wyłącznie z jednego wyrażenia, jest parabolą, której wierzchołek znajduje się zawsze w początku układu współrzędnych: W = (0, 0).

Dodatkowo obliczamy po dwa punkty, znajdujące się na lewo i na prawo od początku układu współrzędnych. Wybraliśmy:

x = -2 (-2, -8), **x = -1** (-1, -2)

x = 1 (1, -2), **x = 2** (2, -8)

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią w kształcie paraboli:

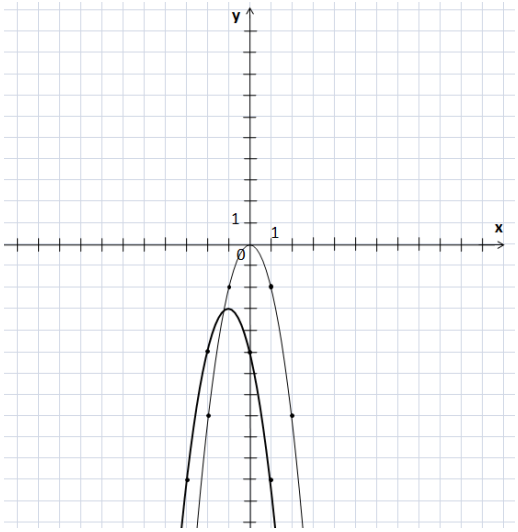


1) Przesuwamy wykres funkcji o wektor (podrozdział 7.8).

$$y = -2(x+1)^2 - 3$$

Wektor przesunięcia:

[-1, -3] **Pamiętajmy, aby zmienić znak pierwszej współrzędnej.**



9.4 Własności funkcji kwadratowej (D, ZW, min/ max, monotoniczność)

TREŚĆ z tablic matematycznych (w dziale: FUNKCJA KWADRATOWA):
Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy a > 0, do dołu, gdy a < 0.

- ***Dziedziną*** funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych: **D = R.**
- ***Zbiór wartości, minimum/maksimum, przedziały monotoniczności***

Do określenia tych trzech własności potrzebujemy współrzędnych wierzchołka paraboli.
Oprócz tego, dla ułatwienia, dobrze narysować sobie uproszczony wykres.
UPROSZCZONY WYKRES to taki, który rysujemy mając tylko jeden punkt - **wierzchołek** oraz bazując na zasadzie umieszczonej w ramce – czyli **szkicując ramiona skierowane w górę lub w dół**.
Mając do dyspozycji taki wykres, wymienione własności określamy, odczytując je z wykresu (podrozdział 7.5).

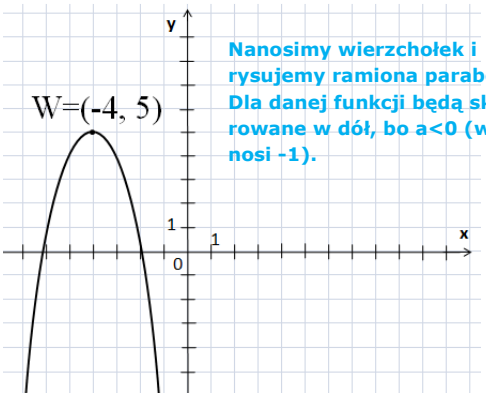
Przykład: $y = -x^2 - 8x - 11$

Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-11) = 20$$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2\cdot(-1)} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-20}{4\cdot(-1)} = \frac{-20}{-4} = 5$$



Nanosimy wierzchołek i rysujemy ramiona paraboli. Dla danej funkcji będą skierowane w dół, bo a<0 (wynosi -1).

Odczytujemy własności bazując na wykresie:

Zbiór wartości

$ZW = (-\infty,\ 5\rangle$

Przedziały monotoniczności

$f(x)\searrow$ w przedziale $\langle -4,\ \infty)$

$f(x)\nearrow$ w przedziale $(-\infty,\ -4\rangle$

Minimum/maksimum

Konkretna funkcja kwadratowa, gdy nie ma ograniczonej dziedziny, może mieć albo minimum, albo maksimum. Tutaj mamy do czynienia z maksimum. Zapisujemy więc:

$f(x)_{max} = 5$ dla $x = -4$

9.5 Równania kwadratowe

www.matematykam.pl

- ***Równania kwadratowe zupełne:***

Czyli równania w „pełnej" postaci: **$ax^2 + bx + c = 0$**

Niektóre równania możemy rozwiązać stosując **wzory skróconego mnożenia (pierwszy lub drugi).**
Warunkiem jest oczywiście możliwość wykorzystania któregoś z wzorów (podrozdział: 2.2).

Przykład: $x^2 - 6x + 9 = 0$ Tu możemy wykorzystać drugi wzór skróconego mnożenia:
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(x-3)^2 = 0$$

Rozwiązujemy równanie, powstałe po „pominięciu" potęgi.

$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

UWAGA! Równanie kwadratowe musimy często najpierw uprościć – wszystkie wyrażenia muszą znajdować się po lewej stronie, w kolejności od wyrażenia z x^2 do liczby. Przykład:

$$-2(x+1) - (x+3)^2 - 12 = 2x(x-5) - 12$$
$$-2x - 2 - (x^2 + 6x + 9) - 12 = 2x^2 - 10x - 12$$
$$-2x - 2 - x^2 - 6x - 9 - 12 = 2x^2 - 10x - 12$$
$$-8x - 23 - x^2 = 2x^2 - 10x - 12$$
$$-x^2 - 2x^2 - 8x + 10x - 23 + 12 = 0$$
$$-3x^2 + 2x - 11 = 0$$

Uniwersalną metodą jest korzystanie **ze wzorów** na wyróżnik oraz miejsca zerowe funkcji kwadratowej (podrozdział 9.1). Liczba rozwiązań jest zależna od wyróżnika, tak jak liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej. Gdy wyróżnik jest większy od zera mamy dwa rozwiązania, równy zero – jedno rozwiązanie, mniejszy od zera – brak rozwiązań. Przykład: $3x^2-9x+6=0$

$$\Delta=b^2-4ac=9^2-4\cdot3\cdot6=81-72=9$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-9)+\sqrt{9}}{2\cdot3}=\frac{9+3}{6}=2 \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-9)-\sqrt{9}}{2\cdot3}=\frac{9-3}{6}=1$$

❖ ***Równania kwadratowe niezupełne***

- równania: $ax^2=0$

Przykład: $6x^2=0$

Rozwiązaniem tego typu równań (niezależnie od wartości liczby stojącej przed „x") jest zawsze zero: $x=0$

- równania: $ax^2+bx=0$

Przykład:

$$2x^2+6x=0$$

Najpierw należy wyłączyć „x" przed nawias:

$$x(2x+6)=0$$

Rozwiązujemy dwa równania (otrzymujemy dwa rozwiązania):

$$x_1=0 \qquad \begin{aligned}2x+6&=0\\2x&=-6\\x_2&=-3\end{aligned}$$

- równania: $ax^2+c=0$

Przykład: $4x^2-16=0$

Wykorzystujemy trzeci wzór skróconego mnożenia (podrozdział 2.1) – ta metoda nie zawsze może być wykorzystana. Warunkiem jest oczywiście zgodność znaków ze wzorem skróconego mnożenia (lub gdy otrzymamy takie znaki mnożąc całe równanie przez -1). W przeciwnym wypadku równanie nie ma rozwiązań ($x\in\varnothing$).

$$4x^2-16=0$$

$$(2x+4)(2x-4)=0$$

Rozwiązujemy dwa równania i otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$\begin{aligned}2x+4&=0\\-2x&=-4\\x_1&=-2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}2x-4&=0\\2x&=4\\x_2&=2\end{aligned}$$

www.matematykam.pl

9.6 Nierówności kwadratowe

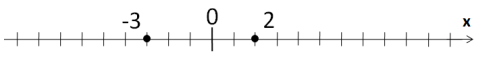
Nierówności kwadratowe rozwiązujemy w dwóch etapach. Pełne rozwiązanie przedstawimy na przykładzie: $2x^2+2x-12\geq0$

I. Pierwszy etap, to wyznaczenie miejsc zerowych, tak jakbyśmy rozwiązywali równanie kwadratowe.

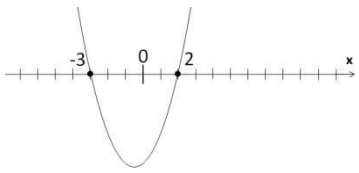
$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\cdot2\cdot(-12)=100 \qquad x_1=\frac{-2+\sqrt{100}}{2\cdot2}=2 \quad x_2=\frac{-2-\sqrt{100}}{2\cdot2}=-3$$

II Drugi etap, to zaznaczenie rozwiązania na osi i odczytanie przedziałów.

1) Rysujemy oś i zaznaczamy na niej miejsca zerowe (kropki mogą być zakolorowane lub nie, ≥ lub ≤ - zakolorowane; > lub < - niezakolor.).

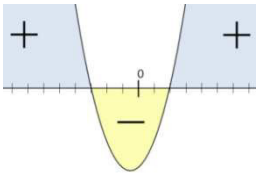


2) Rysujemy parabolę – bardzo przybliżony szkic. Istoty jest jedynie kierunek ramion paraboli (ramka – podrozdział 9.4) .

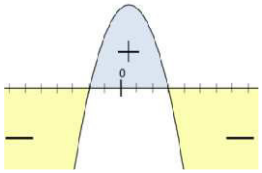


3) Zakreślamy odpowiedni obszar.

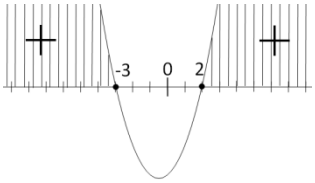
Parabola może mieć dwie postaci (ramiona skierowane w dół lub w górę). Na poniższych rysunkach zaznaczyliśmy obszary dodatnie (niebieski kolor) oraz ujemne (żółty kolor) dla obu przypadków.



Gdy mamy znak nierówności „mniejszy" **(<)** lub „mniejszy lub równy" **(≤), zakreślamy obszar ujemny.**
Gdy mamy znak nierówności „większy" **(>)** lub „większy lub równy" **(≥), zakreślamy obszar dodatni.**



Dla przykładu:



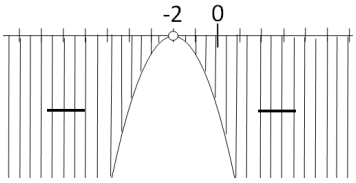
4) Odczytujemy rozwiązanie. Są nim przedział lub przedziały wyznaczone przez zakreślony obszar.

$x \in (-\infty,\ -3\rangle \cup \langle 2,\ \infty)$

Nawiasy przy liczbach (-3 i 2) są domknięte (trójkątne), ponieważ kropki w tych punktach są zakolorowane.

Inne przypadki nierówności (z jednym rozwiązaniem równania lub z równaniem bez rozwiązań)

Przykład: $-x^2-4x-4<0$ **Otrzymamy jedno rozwiązanie równania: x = -2**



Rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych, wyłączając jedną liczbę (tu liczbę: -2). Cała parabola znajduje się w obszarze ujemnym (pod osią), oprócz jednego punktu dla x = -2, który znajduje się na osi, co oznacza, że ma wartość 0. Ponieważ rozwiązaniem mają być wyłącznie wartości mniejsze od zera, liczba -2 do niego nie należy.

$x \in R \setminus \{-2\}$

Wszystkie przypadki nierówności kwadratowych, na jakie możemy trafić, są omówione na naszej stronie: **www.matematykam.pl: MATERIAŁ MATURALNY → funkcja kwadratowa → nierówności kwadratowe**

10. WIELOMIANY

10.1 Działania na wielomianach (stopień wielomianu)

Wielomian to wyrażenie algebraiczne z jedną zmienną (x), złożoną z sumy jednomianów, w którym „x" pojawia się z potęgą naturalną (1, 2, 3…). Wielomian oznaczamy małą lub wielką literą alfabetu (najczęściej „w"). Przykład: $w = 4x^3 - x^2 + 5x - 8$

- ***Stopień wielomianu.*** Jest równy najwyższej potędze, jaka pojawia się w danym wielomianie.
  Oznaczamy go: $st(w)$ **W nawiasie zapisujemy literę, którą oznaczony jest dany wielomian.**

Przykład:

www.matematykam.pl

$$w = -3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 5x - 8$$
$$st(w) = 5$$

- ***Działania na wielomianach***

Działania na wielomianach nie różnią się w zasadzie niczym od działań, jakie wykonujemy na innych wyrażeniach algebraicznych. Przedstawimy je na przykładzie działań na dwóch wielomianach:

$w = 2x^3 - 3x^2 - 4$; $u = 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 2x$

Pamiętajmy, że wyrażenia w wielomianie należy uszeregować od największej do najmniejszej potegi.

- ***Dodawanie wielomianów.*** Dodajemy wyrażenia podobne.

$$w + u = 2x^3 - 3x^2 - 4 + 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 2x = 4x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 2x - 4$$

- ***Odejmowanie wielomianów***. Należy pamiętać, aby odejmując od siebie dwa wielomiany, drugi zapisać w nawiasie (minus przed nawiasem zmieni nam wszystkie znaki).

$w - u = 2x^3 - 3x^2 - 4 - (4x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 2x)$ **Opuszczamy nawias (pamiętajmy o zmianie znaków).**

$$w - u = 2x^3 - 3x^2 - 4 - 4x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x = -4x^4 - 3x^3 + 2x - 4$$

- ***Mnożenie wielomianów.*** W celu przemnożenia przez siebie dwóch wielomianów, oba musimy zapisać w nawiasie. Mnożenie wykonujemy zgodnie z zasadami działań na wyrażeniach algebraicznych, czyli mnożymy każde wyrażenie przez każde.

$$w \cdot u = (2x^3 - 3x^2 - 4) \cdot (4x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 2x)$$
$$w \cdot u = 8x^7 + 10x^6 - 6x^5 - 4x^4 - 12x^6 - 15x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 16x^4 - 20x^3 + 12x^2 + 8x$$
$$w \cdot u = 8x^7 - 2x^6 - 21x^5 + 11x^4 - 14x^3 + 12x^2 + 8x$$

10.2 Zadania z parametrem

Czyli: dla jakiej wartości parametrów, dane wielomiany są sobie równe?

Przykład: Dla jakiej wartości parametrów a, b oraz c podane wielomiany są sobie równe:

$$w = (2+a)x^5 - 3x^3 - 4x^2 + 2; \quad u = 8x^5 + 2bx^4 - 3x^3 - 4x^2 - 10c$$

Zadania tego typu są dość łatwe do rozwiązania. Aby dwa wielomiany były identyczne, muszą mieć takie same współczynniki liczbowe. Układamy kilka równań. Jedno równanie powstaje poprzez przyrównanie do siebie tych samych współczynników.

Dla przedstawionego przykładu, będziemy mieli trzy równania

Pierwszy parametr (a) znajduje się „przed" x^5 w pierwszym wielomianie, dlatego przyrównujemy do siebie wyrażenia znajdujące się przed x^5 w obu wielomianach, czyli: 2 + a oraz 8.

$$2+a=8$$
$$a=8-2$$
$$a=6$$

Drugi parametr (b) znajduje się „przed" x^4 w drugim wielomianie, dlatego przyrównujemy do siebie wyrażenia znajdujące się przed x^4 w obu wielomianach. UWAGA: skoro w pierwszym wielomianie nie ma takiego wyrażenia, to znaczy, że wynosi ono 0! Mamy więc: 0 oraz 2b.

$$2b=0$$
$$b=0$$

Trzeci parametr (c) to wartość wyrażenia liczbowego (bez x). Przyrównujemy do siebie takie wyrażenia z obu równań: 2 oraz -10c.

$$-10c=2 \quad /\div(-10)$$
$$c=-\frac{1}{5}$$

10.3 Rozkład wielomianu na czynniki

Rozkładając wielomian na czynniki, mamy do dyspozycji kilka metod. O wyborze metody lub metod jakie zastosujemy, decyduje postać danego wielomianu.

I. Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias (podrozdział 2.3).

WARUNEK: „x" musi pojawiać się w każdym wyrażeniu (jednomianie).

www.matematykam.pl

Przykład:

Przed nawias wyłączamy czynnik złożony z:
- wspólnego dzielnika współczynników liczbowych (tutaj 5),
- najniższej potęgi „x" (tutaj x^4).

$$w = 5x^6 + 10x^5 - 15x^4 = 5x^4(x^2 + 2x - 3)$$

Wyrażenia w nawiasie ustalamy tak, że gdybyśmy przemnożyli je przez czynnik wyłączony przed nawias ($5x^4$), otrzymalibyśmy to co było na początku.
Przykładowo: Drugie wyrażenie wynosi 2x bo $5x^4 \cdot 2x = 10x^5$.

II. Wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia w celu zamiany sumy na iloczyn (2.1 i 2.2).

WARUNEK: wielomian musi mieć formę odpowiadającą któremuś ze wzorów skróconego mnożenia (odpowiednia liczba wyrażeń i odpowiednie znaki).

Przykład:

UWAGA: Liczba wyrażeń i znaki sugerują możliwość wykorzystania aż dwóch wzorów – piątego albo szóstego: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Ponieważ potęga dzieli się przez 3, wykorzystujemy drugi wzór.

$$w = 8x^3 - 27 = (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
Pierwsze wyrażenie to „a" podniesione do potęgi trzeciej. Jeżeli $a^3 = 8x^3$, to $a = 2x$.
Drugie wyrażenie to „b" podniesione do potęgi trzeciej. Jeżeli $b^3 = 27$, to $b = 3$.

III. Zamiana na postać iloczynową funkcji kwadratowej (podrozdział 9.2).

WARUNEK: Wielomian musi mieć postać trójmianu kwadratowego.

Przykład:

Ze wzorów obliczamy:
1) wyróżnik – Δ; 2) miejsca zerowe 3) zapisujemy postać iloczynową:
$a(x-x_1)(x-x_2)$ lub $a(x-x_0)^2$ (gdy nie ma miejsc zerowych nie istnieje postać iloczynowa).

$$w = 2x^2 - 6x - 8$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 2\cdot(-8) = 100 \quad x_1 = \frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\cdot 2} = 4 \quad x_2 = \frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\cdot 2} = -1$$

$$w = 2(x-4)(x+1)$$

IV. Grupowanie wyrażeń

WARUNEK: Liczba wyrażeń musi być parzysta (minimalnie cztery wyrażenia). Przykład:

$w = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 6$ **Łączymy wyrażenia w pary – pierwsze z drugim wyrażeniem oraz trzecie z czwartym.**

1) $w = 4x^2(x-2) - 3(x-2)$ 3)

2) $w = (4x^2 - 3)(x-2)$

Każdą parę traktujemy jak osobne wyrażenie. Każde z nich przekształcamy wyłączając czynnik przed nawias.
UWAGA: Czasem mogą pojawić się problemy ze znakami i w drugim nawiasie mogą pojawić się przeciwne znaki. Dla wyeliminowania tego problemu, najlepiej wyłączanie przed nawias, przeprowadzić w kolejności:
1) Wyłączamy czynnik przed nawias w pierwszej parze.
2) Przepisujemy uzyskany nawias.
3) Ustalamy czynnik przed nawiasem dla drugiej pary (tutaj będzie to -3, ponieważ: -3·x =-3x oraz (-3)·(-2)=6.

Zapisujemy dwa nawiasy: pierwszy powstaje poprzez „zebranie" wyrażeń przed nawiasami, a drugi jest uzyskanym, wspólnym nawiasem.

Wielomian rozkładamy aż do momentu, gdy w żadnym nawiasie nie ma zmiennej „x" podniesionej do jakiejkolwiek potęgi. Ponadto, poza nawiasami jedynym działaniem jakie może istnieć, jest mnożenie. UWAGA! Przekształcenie wielomianu do tej formy nie zawsze będzie dla nas wykonalne. W takim przypadku kończymy rozkład wielomianu, gdy „już nic więcej nie da się zrobić".

www.matematykam.pl

10.4 Równania wielomianowe

Aby rozwiązać równanie wielomianowe, należy wykonać dwie czynności:

!!! Czasem konieczne jest przekształcenie równania do odpowiedniej postaci. Wszystkie wyrażenia powinny znajdować się po lewej stronie w odpowiedniej kolejności (od największej do najmniejszej potęgi).

I. Rozłożyć równanie na czynniki, tak jak to zostało przedstawione w poprzednim podrozdziale.

Przykład: $-2x^4 - 6x^3 + 20x^2 = 0$ Po dokonaniu rozkładu na czynniki otrzymamy:

$-2x^2(x-2)(x+5) = 0$

II. Rozwiązać kilka równań, przyrównując każdy z czynników do zera.

$-2x^2(x-2)(x+5) = 0$

$-2x^2 = 0 \quad x-2=0 \quad x+5=0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -5$

Powyższe równanie wielomianowe ma **trzy rozwiązania: -5, 0, 2.**

UWAGA: W przypadku równań wielomianowych nie jest konieczne rozkładanie na czynniki do samego końca. Wystarczy, że otrzymamy czynniki, które po przyrównaniu do zera dadzą równanie możliwe do rozwiązania. Przykład:

$x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$

$x^3(x+1) - 8(x+1) = 0$

$(x^3 - 8)(x+1) = 0$ **Na tym etapie możemy zakończyć. Wprawdzie w pierwszym czynniku mamy potęgę 3, ale otrzymamy równanie: $x^3 - 8 = 0$, które możemy rozwiązać.**

$x^3 - 8 = 0 \quad x+1=0$

$x^3 = 8 \quad x_2 = -1$

$x_1 = 2$

Krotność rozwiązania jest równa potędze, do jakiej podniesiony jest czynnik, z którego je otrzymaliśmy. Przykładowo: Rozkładając na czynniki wielomian w równaniu otrzymaliśmy:

$x^4(x+5)^2(x-8) = 0$

$x^4 = 0 \quad x+5=0 \quad x-8=0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = 8$

krotność: 4 krotność: 2 krotność: 1

UWAGA: Gdy nie ma żadnej potęgi, to znaczy, że krotność wynosi 1.

10.5 Pierwiastek wielomianu

Pierwiastek równania czy funkcji, a w naszym wypadku wielomianu lub równania wielomianowego, to rozwiązanie tego równania.
Gdy w zadaniu pojawia się polecenie podania pierwiastków wielomianu, należy rozwiązać równanie, przyrównując wielomian do zera. Otrzymane rozwiązania są pierwiastkami wielomianu.
Przykład: Oblicz pierwiastki wielomianu:

$w = 2x^5 - 8x^3$ **Przyrównujemy wielomian do zera i rozwiązujemy powstałe równanie, tak jak przedstawiliśmy to w poprzednich podrozdziałach. Ostatecznie otrzymujemy rozwiązania:**

$x_1 = 0 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 2$

Pierwiastkami wielomianu są liczby: **-2, 0, 2**.
Gdy pojawia się polecenie sprawdzenia, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu, podstawiamy daną liczbę za „x" w wielomianie. Dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu, jeżeli otrzymamy wynik zero.

Przykład 1. Sprawdzimy, czy liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu:

$w = x^3 + 3x - 64$ **Podstawiamy -3 za „x" i obliczamy.**

$w = (-3)^3 + 3 \cdot (-3) + 64 = 28$

Otrzymany wynik jest różny od zera. W związku z tym liczba (-3) nie jest pierwiastkiem wielomianu.

Liczba -3 nie jest pierwiastkiem wielomianu.

Przykład 2. Sprawdzimy czy liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu:

$w = 2x^5 - 4x^2 - 24x$ **Podstawiamy 2 za „x" i obliczamy.**

$w = 2 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 = 0$

Otrzymaliśmy wynik zero. W związku z tym liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu.

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu.

11. FUNKCJA WYKŁADNICZA

11.1 Wyrażenia wykładnicze

Wyrażeniem wykładniczym jest każde wyrażenie „złożone" z podstawy potęgi i wykładnika potęgi.
Przykłady: 2^6, $(-2)^5$, a^2, x^4
W tym rozdziale interesują nas wyrażenia wykładnicze, których podstawa jest wartością liczbową, a potęga zawiera zmienną (oznaczaną symbolem literowym).
Przykłady: 2^{-2x}, $(-6)^a$

❖ ***Działania na wyrażeniach*** – wykorzystujemy wzory na potęgi (podrozdziały 1.1 i 1.2).

Przykład: **Wykorzystujemy wzory (6 i 9).**

Zamieniamy pierwiastek na potęgę.

$$\frac{\sqrt[4]{3^a} \cdot 3^{\frac{3}{4}a}}{3^{-2a} \div 3^{-3a}} = \frac{3^{\frac{1}{4}a} \cdot 3^{\frac{3}{4}a}}{3^{-2a-(-3a)}} = \frac{3^{\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}a}}{3^{-2a+3a}} = \frac{3^a}{3^a} = 1$$

www.matematykam.pl

11.2 Równania wykładnicze

Równanie wykładnicze, to równanie, w którym niewiadoma znajduje się w potędze.

Przykład: $3^{2x+1} - 37 = -10$. Wykonujemy trzy czynności:

I. Przenosimy wyrażenia z „x" na lewo, a liczby na prawo. Dla przedstawionego przykładu:

$3^{2x+1} = -10 + 37$

$3^{2x+1} = 27$

II. Zapisujemy po prawej stronie taką samą liczbę, jaka znajduje się po lewej, podnosząc ją do określonej potęgi.

$3^{2x+1} = 3^3$ **bo: $3^3 = 27$**

III. Eliminujemy podstawy potęg. Wystarczy teraz rozwiązać równanie, jakie powstanie po przyrównaniu do siebie samych wykładników.

$3^{2x+1} = 3^3$

$2x + 1 = 3$

$2x = 3 - 1$

$2x = 2 \quad /\div 2$

$x = 1$

11.3 Wykres funkcji wykładniczej

Funkcja wykładnicza zawiera we wzorze „x" w potędze. Przykład: $f(x) = 5^x$

Wyróżniamy proste przypadki i bardziej skomplikowane.

❖ ***Proste przypadki***

Wzór składa się z liczby podniesionej do potęgi „x". Wyróżniamy funkcje, które mają w podstawie liczbę większą od 1 oraz funkcje, które mają w podstawie ułamek. Wykresy funkcji obu typów zawsze przechodzą przez punkt (0, 1).

Funkcja mające w podstawie liczbę większą od 1.

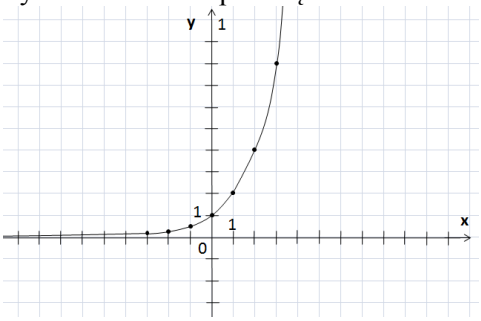
Przykład: $f(x) = 2^x$

Aby narysować wykres funkcji w pierwszej kolejności tworzymy tabelę zawierającą punkt (0, 1) oraz parę punktów położonych na lewo od tego punktu, oraz parę położonych na prawo.

Punkty na lewo od (0, 1). Punkty na prawo od (0, 1).

x	-3	-2	-1	**0**	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	**1**	2	4	8

Następnie zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i łączymy je linią. UWAGA: Linia wykresu nie może przeciąć osi 0X.

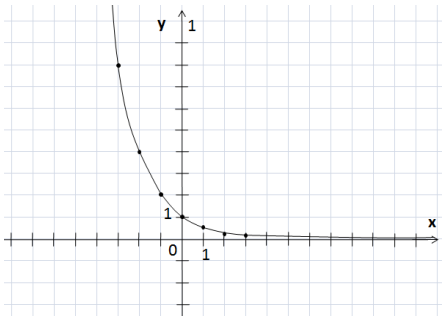


Funkcje mające w podstawie ułamek.

Przykład: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Postępujemy dokładnie w ten sam sposób, jak dla funkcji mającej w podstawie liczbę większą od 1.

x	-3	-2	-1	**0**	1	2	3
y	8	4	2	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



www.matematykam.pl

❖ ***Bardziej skomplikowane przypadki***

Funkcje wymagające przesuwania prostszych przypadków wzdłuż osi układu.

Przykład: $f(x) = 2^{x-1} - 4$

W celu narysowania powyższej funkcji, w pierwszej kolejności rysujemy prostszą funkcję:

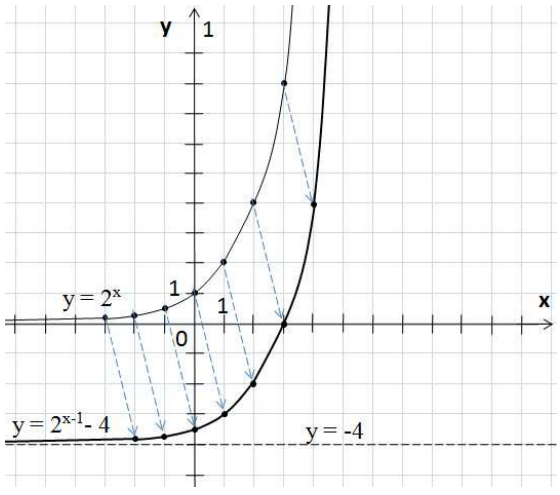
$f(x) = 2^x$

Następnie przesuwamy wykres o określony wektor (podrozdział 7.8).

$f(x) = 2^{x-1} - 4$

Funkcję $f(x) = 2^x$ będziemy przesuwać o wektor: [1, -4]. PRZYPOMINAMY: pierwsza współrzędna zmienia znak.

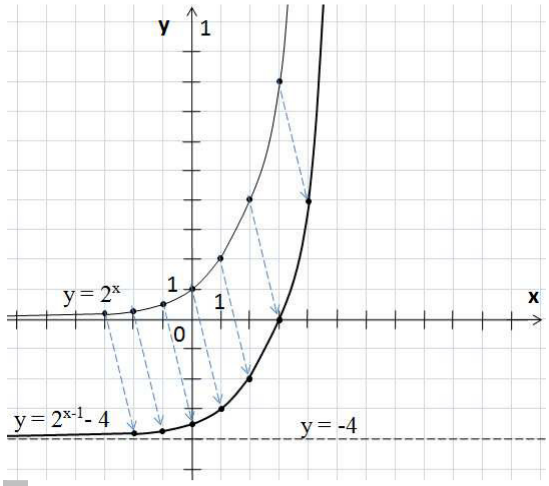
UWAGA! W prostych przypadkach linia wykresu nie przecina osi 0X. Teraz nie przecina poziomej prostej położonej na danej wysokości. W rozpatrywanym przykładzie wykres przesuwamy o 4 jednostki w dół, dlatego dana prosta będzie znajdować się na wysokości -4 (będzie miała wzór: **y = -4**). Jest to tak zwana **ASYMPTOTA POZIOMA**.



11.4 Własności funkcji wykładniczej

Powinniśmy potrafić określić pięć podstawowych własności: **1)** dziedzina funkcji, **2)** zbiór wartości, **3)** monotoniczność, **4)** miejsce zerowe, **5)** asymptota. Własności danej funkcji wykładniczej najprościej określimy na podstawie wykresu, którego rysowanie przedstawiliśmy w poprzednim podrozdziale (odczytywanie własności funkcji na podstawie wykresu przedstawiliśmy w podrozdziale 7.5). Wyjątek stanowi miejsce zerowe. Wykres umożliwi nam jedynie ocenę, czy miejsce zerowe istnieje.

Przykład: Funkcja z poprzedniego podrozdziału, o wzorze: $f(x) = 2^{x-1} - 4$



1) Dziedzina funkcji – dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

$D = R$

2) Zbiór wartości

$ZW = (-4, \infty)$

3) Monotoniczność

$f(x)\nearrow$ - funkcja jest rosnąca.

4) Miejsce zerowe – wykres umożliwia nam „ocenę" czy miejsce zerowe istnieje, choć nie jest do tego konieczny. Miejsce zerowe ma ta funkcja wykładnicza, której wzór wskazuje na to, że podczas rysowania przesuwalibyśmy w dół. Miejsce zerowe obliczamy podstawiając za „y" wartość zero (podrozdział 7.4). Otrzymujemy równanie wykładnicze (podrozdział 11.2).

$$2^{x-1} - 4 = 0$$
$$2^{x-1} = 4$$
$$2^{x-1} = 2^2$$
$$x - 1 = 2$$
$$x = 3$$

www.matematykam.pl

5) Asymptota – funkcja wykładnicza ma zawsze asymptotę poziomą o wzorze w postaci y = c. Wartość *c* jest równa liczbie jednostek, o jakie przesuwamy w pionie wykres podczas rysowania (poprzedni podrozdział). Gdy nie wykonujemy przesuwania w pionie, asymptotą jest oś 0X i ma wzór: y = 0.

We wzorze danej funkcji, za przesuwanie w pionie, odpowiedzialna jest wartość -4. Pozioma przerywana prosta (asymptota) znajduje się właśnie na tej wysokości, dlatego ma wzór:

$y = -4$

12. LOGARYTMY

12.1 Istota logarytmu

TREŚĆ z tablic matematycznych (w dziale: LOGARYTMY):

Niech a > 0 i a ≠ 1. Logarytmem $\log_a c$ liczby c > 0 przy podstawie *a* nazywamy wykładnik *b* potęgi, do której należy podnieść podstawę *a*, aby otrzymać liczbę *c*:

$$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$$

$\log_a b$ → **liczba logarytmowana**

↓ **podstawa logarytmu**

Przykłady:

$\log_2 8 = 3$ **bo: $2^3 = 8$**

$\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$ **bo: $(\sqrt{2})^2 = 2$**

Ponadto warto zapamiętać, że:

$\log_a a = 1$ **Ponieważ: $a^1 = a$**

$\log_a 1 = 0$ **Ponieważ: $a^0 = 1$**

Przykłady:

$\log_6 6 = 1$

$\log_5 1 = 0$

Gdy logarytm nie ma zapisanej podstawy, oznacza to, że wynosi ona 10.

$\log b$ (10) Przykład: $\log 100 = 2$ bo: $10^2 = 100$

12.2 Równania logarytmiczne

Rozwiązanie równania z logarytmem, sprowadza się przede wszystkim do usunięcia z nich logarytmu (choć równania pierwszego typu możemy rozwiązać w alternatywny – prostszy sposób). Równanie przekształcamy zgodnie z istotą logarytmu:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

W zależności od tego, gdzie znajduje się niewiadoma otrzymujemy równanie wielomianowe, kwadratowe, liniowe albo wykładnicze. Możemy wyróżnić trzy podstawowe typy, w sytuacji gdy „x" znajduje się tylko w jednym miejscu.

TYP I – niewiadoma znajduje się w wyniku logarytmowania. Po usunięciu logarytmu, otrzymujemy więc równanie wykładnicze (podrozdział 11.2).

Przykład:

$$\log_2 64 = 2x$$
$$2^{2x} = 64$$
$$2^{2x} = 2^6$$
$$2x = 6 \quad /\div 2$$
$$x = 3$$

Alternatywny sposób tylko dla tego typu, polega na wykonaniu logarytmowania:

$$\log_2 64 = 2x$$
$$6 = 2x \quad /\div 2$$
$$x = 3$$

TYP II – niewiadoma znajduje się w podstawie logarytmu. Po usunięciu logarytmu, niewiadoma będzie znajdować się w podstawie potęgi. Otrzymujemy więc równanie liniowe, kwadratowe lub wielomianowe (podrozdziały: 9.5 i 10.4).

Przykład:

$$\log_{3x} 81 = 3$$

W tym typie równania, należy najpierw okręcić dziedzinę, ponieważ podstawa logarytmu musi spełniać warunki:

podstawa > 0 i *podstawa* $\neq 1$

$$3x > 0 \qquad 3x \neq 1$$
$$x > 0 \qquad x \neq \frac{1}{3}$$

Stąd: $x \in (0, \infty) \setminus \frac{1}{3}$

Rozwiązujemy równanie:

$$\log_{3x} 81 = 3$$
$$(3x)^3 = 81$$
$$27x^3 = 81 \quad /\div 27$$
$$x^3 = 3$$
$$x = \sqrt[3]{3}$$

Sprawdzamy czy rozwiązanie należy do dziedziny.

Tu należy, a więc jest to ostateczne rozwiązanie równania.

TYP III– niewiadoma znajduje się w wielkości logarytmowanej. Po usunięciu logarytmu, niewiadoma będzie znajdować się po prawej stronie równania. Otrzymujemy więc równanie liniowe, kwadratowe lub wielomianowe (podrozdziały: 9.5 i 10.4).

Przykład:

$$\log_5 (x+1) = 2$$

W tym typie równania, należy najpierw okręcić dziedzinę, ponieważ liczba logarytmowana musi spełniać warunek:

liczba logarytmowana > 0

$$x + 1 > 0$$
$$x > -1$$

Stąd: $x \in (-1, \infty)$

Rzowiązujemy równanie:

$$\log_5 (x+1) = 2$$
$$5^2 = x + 1$$
$$25 = x + 1$$
$$-x = 1 - 25$$
$$-x = -24 \quad /\cdot(-1)$$
$$x = 24$$

Sprawdzamy czy rozwiązanie należy do dziedziny.

Tu należy, a więc jest to ostateczne rozwiązanie równania.

12. 3 Sposób na trudniejsze logarytmy

Z poniższego sposobu postępowania możemy korzystać zawsze, ale bardzo przydatny okazuje się dopiero przy dość skomplikowanych logarytmach. Przedstawimy go na przykładzie:

$$\log_{\frac{1}{25}\sqrt[4]{5}} 5\sqrt[3]{5}$$

Tworzymy równanie, przyrównując logarytm do x: $\log_{\frac{1}{25}\sqrt[4]{5}} 5\sqrt[3]{5} = x$

Otrzymaliśmy równanie logarytmiczne pierwszego typu (poprzedni podpunkt). ROZWIĄZUJEMY RÓWNANIE.

$$\log_{\frac{1}{25}\sqrt[4]{5}} 5\sqrt[3]{5} = x$$
$$\left(\frac{1}{25}\sqrt[4]{5}\right)^x = 5\sqrt[3]{5}$$
$$\left(25^{-1}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\right)^x = 5\cdot 5^{\frac{1}{3}}$$
$$\left(\left(5^2\right)^{-1}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\right)^x = 5\cdot 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(5^{-2}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\right)^x = 5^{1\frac{1}{3}}$$
$$\left(5^{-1\frac{3}{4}}\right)^x = 5^{1\frac{1}{3}}$$
$$5^{-1\frac{3}{4}x} = 5^{1\frac{1}{3}}$$
$$-1\frac{3}{4}x = 1\frac{1}{3}$$

$$-\frac{7}{4}x = \frac{4}{3} \quad /\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)$$
$$x = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)$$
$$x = -\frac{16}{21}$$

Tak więc: $\log_{\frac{1}{25}\sqrt[4]{5}} 5\sqrt[3]{5} = -\frac{16}{21}$

12.4 Wzory i ich wykorzystanie

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: LOGARYTMY):
Dla dowolnych liczb x > 0, y > 0 oraz *r* zachodzą wzory:

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r\cdot\log_a x$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Przykłady wykorzystania powyższych wzorów:

$$\log_2(4\cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16 = 2+4 = 6 \qquad \log_5 25^3 = 3\cdot\log_5 25 = 3\cdot 2 = 6$$
$$\log_3 \frac{3}{81} = \log_3 3 - \log_3 81 = 1-4 = -3$$

www.matematykam.pl

Wszystkie przedstawione powyżej wzory możemy wykorzystywać także w „drugą stronę".
Głównie dotyczy to dwóch pierwszych wzorów, które będziemy wykorzystywać „łącząc" dwa logarytmy w jeden. Robimy to w dwóch celach: ***1) ułatwienie logarytmowania,***
2) umożliwienie logarytmowania – gdy pojedyncze logarytmy są do obliczenia tylko za pomocą kalkulatora. Przykład:

$$\log_5 50 - \log_5 2 = \log_5(50 \div 2) = \log_5 25 = 2$$

Nie jesteśmy w stanie wykonać logarytmowania, zarówno w przypadku pierwszego, jak i drugiego logarytmu. Wykorzystujemy wzór (w „drugą stronę"):

Otrzymaliśmy logarytm możliwy do obliczenia.

$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

13. WYRAŻENIA WYMIERNE

Wyrażenia wymierne, to iloraz dwóch wielomianów. Przykłady:

$$\frac{2x^3-5x^2}{7x^5-5x^3+3x}, \quad \frac{11}{12x^2-2x+3}, \quad \frac{6x^4-3x^2}{3}$$

13.1 Dziedzina wyrażenia

Zanim wykonamy jakiekolwiek działanie na wyrażeniach wymiernych, musimy określić dziedzinę wyrażeń! Przypominamy: w mianowniku nie może znajdować się zero, dlatego z dziedziny, wykluczamy miejsca zerowe mianownika (podrozdział 7.3). Sprowadza się to do obliczenia równania: mianownik $\neq 0$. Rozwiązaniem równania są liczby, jakie wykluczamy z dziedziny. Przykład:

$$\frac{4x^4+5x^3}{3x-12}$$

I. Zapisujemy i rozwiązujemy równanie.

$$3x-12\neq 0$$
$$3x\neq 12 \quad /\div 3$$
$$x\neq 4$$

II. Zapisujemy dziedzinę, którą będzie zbiór liczb rzeczywistych (R) z wyłączeniem rozwiązań równania.

$$D=R\setminus\{4\}$$

Ponadto gdy mamy do czynienia z działaniami na wyrażeniach wymiernych (opisane w dalszej części rozdziału – podrozdział 13.3), określamy dziedzinę dla całego działania.

UWAGA! Gdy mamy do czynienia z dzieleniem, nie tylko mianowniki muszą być różne od zera, ale także licznik dzielnika (wyrażenie przez które dzielimy).

Przykład: $\frac{2x^5-20}{3x}+\frac{12}{2x^2-50}\div\frac{-2x-12}{5x+10}$ **Licznik ostatniego wyrażenia także ma być różny od zera!**

$3x\neq 0$ | $2x^2-50\neq 0$ | $5x+10\neq 0$ | $-2x-12\neq 0$

$x\neq 0$ | $2x^2\neq 50 \quad /\div 2$ | $5x\neq -10 \quad /\div 5$ | $-2x\neq 12 \quad /\div(-2)$

$x^2\neq 25$ | $x\neq -2$ | $x\neq -6$

$x\neq -5 \ \vee \ x\neq 5$

$D=R\setminus\{-6,\ -5,\ -2,\ 0,\ 5\}$ **Po rozwiązaniu równań, otrzymaliśmy liczby: -6, -5, -2, 0, 5. Dziedziną będzie więc zbiór liczb rzeczywistych minus zbiór, zawierający określone liczby - (R\{-6,-5, -2, 0, 5}).**

www.matematykam.pl

13.2 Upraszczanie wyrażenia

Upraszczanie wyrażeń przedstawimy na przykładzie.

Przykład:

$$\frac{6x^4+18x^3}{x^2+2x-3}$$

Określamy dziedzinę:

$$x^2+2x-3\neq 0$$
$$\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16 \quad x\neq\frac{-2-\sqrt{16}}{2\cdot 1}=-3 \ \wedge \ x\neq\frac{-2+\sqrt{16}}{2\cdot 1}=1$$
$$D=R\setminus\{-3,\ 1\}$$

I. Rozkładamy na czynniki licznik i mianownik – w liczniku i mianowniku mamy wielomiany (podrozdział 10.3).

$$\frac{6x^4+18x^3}{x^2+2x-3}=\frac{6x^3(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

II. Wykonujemy skracanie tam gdzie jest to możliwe.

$$\frac{6x^3\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-1)}=\frac{6x^3}{x-1}$$

13.3 Działania na wyrażeniach wymiernych

❖ ***Dodawanie i odejmowanie***

Przedstawimy na przykładzie:

$$\frac{4x}{x-4}-\frac{4}{x+2}$$

Określamy dziedzinę:

$x-4\neq 0$ | $x+2\neq 0$

$x\neq 4$ | $x\neq -2$

$D=R\setminus\{-2,\ 4\}$

I. Doprowadzamy wyrażenia do wspólnego mianownika, który najczęściej będzie iloczynem mianowników dodawanych/odejmowanych wyrażeń. W efekcie musimy pomnożyć licznik i mianownik przez określone wyrażenie.

$$\frac{4x}{x-4}-\frac{4}{x+2}=\frac{4x(x+2)}{(x-4)(x+2)}-\frac{4(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

Wspólnym mianownikiem będzie iloczyn: (x - 4)(x + 2)
W związku z tym licznik i mianownik : - pierwszego wyrażenia mnożymy przez (x + 2),
- drugiego wyrażenia mnożymy przez (x – 4).

II. Dodajemy wyrażenia. Liczniki odejmujemy/dodajemy, wspólny mianownik przepisujemy.

$$\frac{4x(x+2)}{(x-4)(x+2)}-\frac{4(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{4x(x+2)-4(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

III. Wykonujemy wszelkie działania w liczniku. Działania w mianowniku nie wykonujemy! Zostawiamy je, tak jak jest, aż do momentu gdy będziemy upraszczać wynik.

$$\frac{4x(x+2)-4(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{4x^2+8x-4x+16}{(x-4)(x+2)}=\frac{4x^2+4x+16}{(x-4)(x+2)}$$

Upraszczamy otrzymane wyrażenie:

$$\frac{4x^2+4x+16}{(x-4)(x+2)}=\frac{4(x^2+x+4)}{(x-4)(x+2)}$$

Tego wyrażenia nie da się uprościć, ponieważ licznik jest nierozkładalny. W nawiasie mamy wprawdzie równanie kwadratowe, nie ma ono jednak postaci iloczynowej, ponieważ obliczony przez nas wyróżnik okazał się ujemny:
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 1 - 16 = -15$

UWAGA! Nie zawsze wspólny mianownik musi powstawać poprzez mnożenie przez siebie mianowników wyrażeń zawartych w działaniach. Niekiedy wystarczy zmienić mianownik tylko w jednym wyrażeniu.

$$\frac{x-1}{2x(x+6)}+\frac{x^2}{x+6}=\frac{x-1}{2x(x+6)}+\frac{2x\cdot x^2}{2x(x+6)}$$

Tu wspólnym mianownikiem może być wyrażenie: 2x(x + 6). W związku z tym wystarczy pomnożyć drugie wyrażenie przez 2x.

❖ ***Mnożenie***

Mnożymy tak jak ułamki zwykłe: licznik przez licznik, mianownik przez mianownik.
UWAGA! Tylko zapisujemy mnożenie, ale go nie wykonujemy. Po zapisie mnożenia od razu przechodzimy do upraszczania otrzymanego wyrażenia!

Przykład:

$$\frac{x^2-25}{x-8}\cdot\frac{3x}{x+5}$$

Określamy dziedzinę:
$x-8\neq 0 \quad x+5\neq 0$
$x\neq 8 \quad x\neq -5$
$D=R\setminus\{-5,\ 8\}$

www.matematykam.pl

$$\frac{x^2-25}{x-8}\cdot\frac{3x}{x+5}=\frac{(x^2-25)\cdot 3x}{(x-8)(x+5)}$$

Zapisujemy mnożenie na wspólnej kresce ułamkowej:
- licznik przez licznik,
- mianownik przez mianownik.

Upraszczamy otrzymane wyrażenie:

$$\frac{(x^2-25)\cdot 3x}{(x-8)(x+5)}=\frac{\cancel{(x+5)}(x-5)\cdot 3x}{(x-8)\cancel{(x+5)}}=\frac{3x(x-5)}{x-8}$$

❖ ***Dzielenie***

Zamieniamy dzielenie na mnożenie i obracamy drugie wyrażenie. Dalej postępujemy tak jak w przypadku mnożenia.

Przykład:

$$\frac{6x^2-7}{2x(x+4)}\div\frac{3x}{x+4}$$

Określamy dziedzinę:
$2x\neq 0 \quad x+4\neq 0 \quad 3x\neq 0$
$x\neq 0 \quad x\neq -4 \quad x\neq 0$
$D=R\setminus\{-4,\ 0\}$

Pamiętajmy, że w przypadku dzielenia licznik drugiego wyrażenia (3x) także ma być różny od zera!

$$\frac{6x^2-7}{2x(x+4)} \div \frac{3x}{x+4} = \frac{6x^2-7}{2x(x+4)} \cdot \frac{x+4}{3x} = \frac{(6x^2-7)(x+4)}{2x(x+4)\cdot 3x}$$

Upraszczamy wyrażenie:

$$\frac{(6x^2-7)\cancel{(x+4)}}{\cancel{2x(x+4)}\cdot 3x} = \frac{6x^2-7}{2x\cdot 3x} = \frac{6x^2-7}{6x^2}$$

13.4 Równania wymierne

W pierwszej kolejności przekształcamy równanie, tak aby wyeliminować z niego wyrażenie wymierne. W efekcie mamy do rozwiązania równanie liniowe, kwadratowe lub wielomianowe (podrozdziały: 9.5 i 10.4). ***UWAGA! Po rozwiązaniu równania, sprawdzamy czy otrzymane liczby należą do dziedziny. Jeżeli nie, to dana wartość nie jest rozwiązaniem równania.***

www.matematykam.pl

❖ ***Proste przypadki***

- z jednym wyrażeniem wymiernym i zerem;

Tu po wyznaczeniu dziedziny, pomijamy mianownik. Przyrównujemy do zera sam licznik.

Przykład:

$$\frac{2x-16}{5x+10}=0$$

Określamy dziedzinę:

$5x+10\neq 0$

$5x\neq -10$

$x\neq -2$

$D=R\setminus\{-2\}$

Przyrównujemy do zera sam licznik:

$2x-16=0$

$2x=16 \quad /\div 2$

$x=8$

SPRAWDZAMY, czy otrzymana liczba należy do DZIEDZINY – tu należy, a więc jest rozwiązaniem równania.

- z jednym wyrażeniem wymiernym i liczbą/wielomianem;

Przykład:

$$\frac{6x^3-2x^2}{x+7}=2x-4$$

Określamy dziedzinę:

$x+7\neq 0$

$x\neq -7$

$D=R\setminus\{-7\}$

Przekształcamy równanie, mnożąc przez mianownik wyrażenia wymiernego:

$$\frac{6x^3-2x^2}{x+7}=2x-4 \quad /\cdot(x+7)$$

$$6x^3-2x^2=(2x-4)(x+7)$$

Od tego momentu obliczamy równanie metodą przyjętą dla konkretnego typu. Na końcu pamiętajmy, aby sprawdzić, czy otrzymane wyniki należą do dziedziny!

- z dwoma wyrażeniami wymiernymi. Równanie przekształcamy metodą „na krzyż". Aby było to możliwe wyrażenia muszą znajdować się po dwóch stronach znaku równości. Przykład:

$$\frac{2x}{2x+2}-\frac{x-1}{x+1}=0$$

Określamy dziedzinę: $2x+2\neq 0$, $2x\neq -2$, $x\neq -1$; $x+1\neq 0$, $x\neq -1$; $D=R\setminus\{-1\}$

Przenosimy jedno z wyrażeń na prawo, tak by jedno wyrażenie znajdowało się po lewej stronie i jedno po prawej.

$$\frac{x}{2x+2}=\frac{x-1}{x+1}$$

Teraz możemy zastosować metodę „NA KRZYŻ". Pamiętajmy, aby złożone wyrażenia (np.: 2x+2) zapisać w nawiasie.

$$x(x+1)=(x-1)(2x+2)$$

Od tego momentu obliczamy równanie, metodą przyjętą dla konkretnego typu. Na końcu pamiętajmy, aby sprawdzić, czy otrzymane wyniki należą do dziedziny!

❖ ***Trudniejsze przypadki***

Równania z kilkoma wyrażeniami (w tym wymiernymi, liczbami oraz wielomianami).Wymagają one często kilku działań, aby w rezultacie otrzymać tylko dwa wyrażenia. Od tego momentu będziemy mieli do czynienia z jednym z prostszych przypadków.

Przykład:

$$\frac{5x+10}{x-1}-\frac{2x-3}{4}=x-6+\frac{3x+4}{2x}$$

Określamy dziedzinę:

$x-1\neq 0$, $x\neq 1$; $2x\neq 0$, $x\neq 0$

$D=R\setminus\{0,\ 1\}$

Przekształcamy równanie:

Musimy dodać/odjąć od siebie wyrażenia po obu stronach znaku równości.

$$\frac{5x+10}{x-1}-\frac{2x-3}{4}=x-6+\frac{3x+4}{2x}$$
$$\frac{4(5x+10)}{4(x-1)}-\frac{(2x-3)(x-1)}{4(x-1)}=\frac{2x(x-6)}{2x}+\frac{3x+4}{2x}$$
$$\frac{4(5x+10)-(2x-3)(x-1)}{4(x-1)}=\frac{2x(x-6)+3x+4}{2x}$$

W ten sposób otrzymaliśmy **prostszy przypadek** ***z dwoma wyrażeniami wymiernymi***.

14. FUNKCJA WYMIERNA

Wzór funkcji wymiernej można zapisać:

$$y=\frac{a}{x-b}+c$$ - gdzie *a*, *b*, *c* to współczynniki liczbowe, przy czym *b* oraz *c* mogą wynosić zero.

Przykłady:

$$y=\frac{2}{x-4}+5,\quad y=\frac{6}{x},\quad y=\frac{8}{x-9},\quad y=\frac{6}{x}+7$$

14.1 Wykres

Bezpośrednio rysujemy jedynie wykres **najprostszego** przypadku **funkcji wymiernej** (gdy b i c wynoszą zero): $y=\frac{a}{x}$ Przykład: $y=\frac{1}{x}$

www.matematykam.pl

Wykres jest dwuczęściowy. Aby narysować pełny wykres, musimy wyznaczyć kilka punktów:

- **dla argumentów ujemnych:** w tym dla przynajmniej dwóch ułamkowych, dla -1 oraz dla dwóch argumentów całkowitych,
- **dla argumentów dodatnich:** w tym dla przynajmniej dwóch ułamkowych, dla 1 oraz dla dwóch argumentów całkowitych.

Otrzymamy dwie grupy punktów. W zależności od znaku współczynnika a, będą one zgromadzone w I i III ćwiartce układu (gdy *a* jest dodatnie) lub w II i IV ćwiartce (gdy *a* jest ujemne).

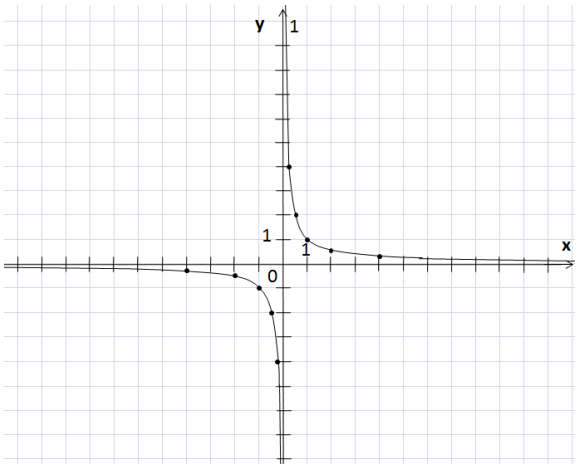
Przykład dla a > 0: $y=\frac{1}{x}$

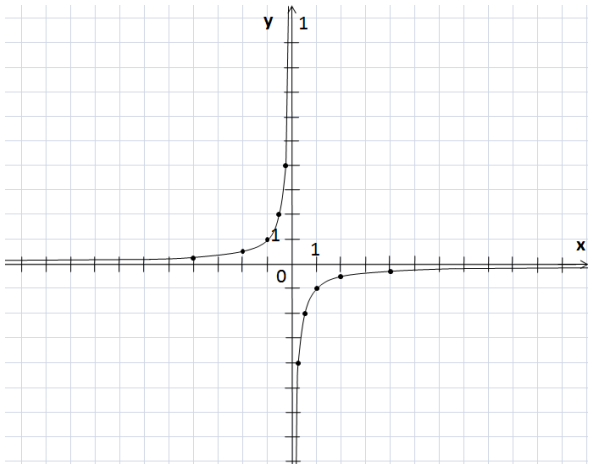
x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Przykład dla a < 0: $y=-\frac{1}{x}$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

Z połączenia dwóch grup punktów powstaną dwie części wykresu. Każda z nich będzie miała kształt tzw. hiperboli, czyli łuku, którego końce będą się ciągnęły wzdłuż osi 0X oraz 0Y, zbliżając się do nich (nie mogą ich przeciąć).





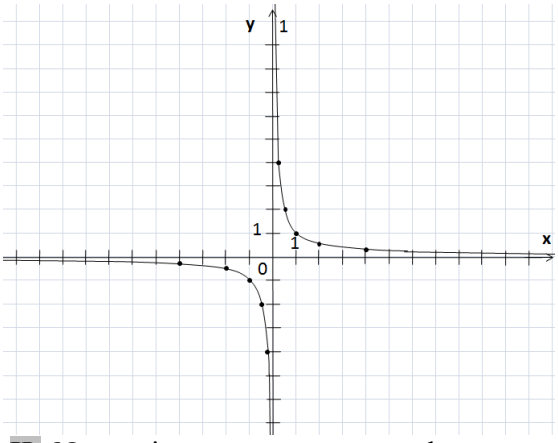
Skoro części wykresu dążą do jakiejś prostej, mamy do czynienia z asymptotami funkcji:
- ***asymptotą poziomą*** jest oś 0X, wzór asymptoty: y = 0,
- ***asymptotą pionową*** jest oś 0Y, wzór asymptoty: x = 0.

❖ ***Trudniejsze przypadki***

Rysujemy, przesuwając wzdłuż osi układu współrzędnych wykresy prostszych przypadków.

Przykład: $y = \frac{1}{x-2} + 3$

I. Rysujemy wykres funkcji, uproszczonej przez pominięcie współczynników b i c: $y = \frac{1}{x}$



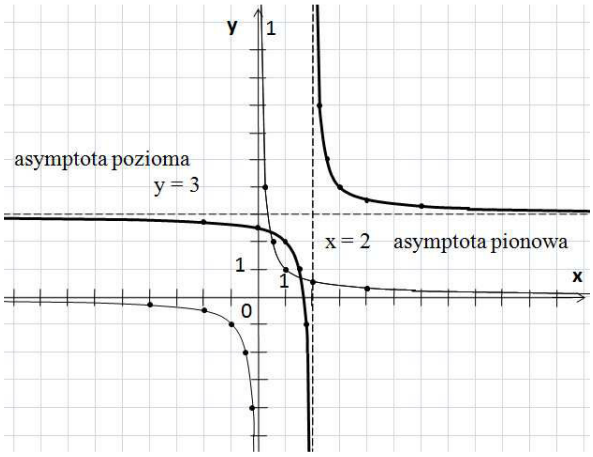
II. Następnie przesuwamy go o wektor.

$y = \frac{1}{x-2} + 3$

PRZYPOMINAMY:
Pierwsza współrzędna wektora ma przeciwny znak:
wektor: [2, 3]

ASYMPTOTY pionową i poziomą przesuwamy wraz z wykresem funkcji.

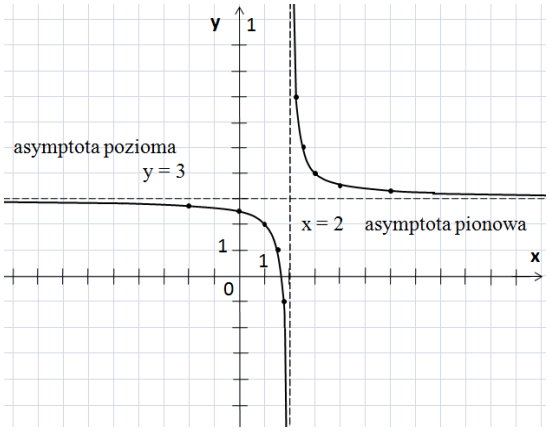
Dla rozpatrywanego przykładu:
- asymptota pozioma będzie znajdowała się na wysokości 3: **y = 3**,
- asymptota pionowa, będzie znajdować się w miejscu argumentu 2: **x = 2**.



www.matematykam.pl

14.2 Własności

Powinniśmy potrafić określić pięć podstawowych własności: **1)** dziedzina funkcji, **2)** zbiór wartości, **3)** miejsce zerowe, **4)** monotoniczność, **5)** asymptoty . Własności danej funkcji wymiernej najprościej określimy na podstawie wykresu(odczytywanie własności funkcji na podstawie wykresu przedstawiliśmy w podrozdziale 7.5), chociaż niektóre z nich możemy określić na podstawie wzoru. Wyjątek stanowi miejsce zerowe, które **musimy** obliczyć.



Przykład: $y = \frac{1}{x-2} + 3$

1) Dziedzina funkcji

Określamy ją, tak jak dziedzinę wyrażeń wymiernych (podrozdział 13.1):

$$x - 2 \neq 0$$
$$x \neq 2$$

Alternatywnie dziedzinę możemy wyznaczyć korzystając z wykresu. Z dziedziny eliminujemy argument w miejscu asymptoty pionowej (2):

$$D = R \setminus \{2\}$$

2) Zbiór wartości - zbiór liczb rzeczywistych, z wyłączeniem jednej wartości – w miejscu asymptoty poziomej. Dla rozpatrywanego przykładu jest to wartość 3:

$$ZW = R \setminus \{3\}$$

3) Miejsce zerowe

Za *y* podstawiamy zero. W efekcie mamy do rozwiązania równanie wymierne.

$$0 = \frac{1}{x-2} + 3$$

Dziedzina: D = R \ {2}

$$-\frac{1}{x-2} = 3 \quad /\cdot(x-2)$$
$$-1 = 3x - 6$$
$$-3x = -6 + 1$$
$$-3x = -5 \quad /\div(-3)$$
$$x = \frac{5}{3}$$

UWAGA! Miejsce zerowe nie zawsze istnieje. Gdy mamy do dyspozycji wykres funkcji widać to od razu – wykres w nie przecina osi 0X. Na podstawie wzoru także możemy to stwierdzić bez obliczeń (współczynnik *c* wynosi zero).

Przykład:

$y = \frac{1}{x-8}$ Brak miejsca zerowych.

4) Monotoniczność

Wykres funkcji wymiernej składa się z dwóch części. Są to dwa przedziały, określone przez dziedzinę. Dziedzina rozpatrywanej funkcji:

$D = R \setminus \{2\}$

Stąd mamy przedziały:

$(-\infty, 2)$ i $(2, \infty)$

Konkretna funkcja jest w obu przedziałach malejąca lub w obu przedziałach rosnąca.

Rozpatrywana funkcja jest w obu przedziałach malejąca, co widzimy na wykresie.

$f(x)\searrow$ w przedziałach $(-\infty, 2)$ i $(2, \infty)$

5) asymptoty

Miejsce asymptot w układzie współrzędnych ustalamy już na etapie rysowania wykresu, co przedstawiliśmy w poprzednim podrozdziale.

Dla rozpatrywanego przykładu:

- asymptota pozioma: y = 3,
- asymptota pionowa: x = 2.

15. CIĄGI

www.matematykam.pl

15.1 Podstawowe informacje (pojęcie ciągu, wzór, wykres)

Ciąg jest specyficznym rodzajem funkcji. Argumenty ciągu oznaczamy symbolem **n** – są to liczby naturalne, dodatnie (1, 2, 3 . . .) Wartości będziemy nazywać wyrazami ciągu – oznaczamy je symbolem $\mathbf{a_n}$. Konkretny ciąg, jak każda funkcja może być opisany wzorem.

Przykład: $a_n = 2n + 1$ **Indeks „n" mówi nam jednocześnie, jaką liczbę będziemy podstawiać do wzoru oraz z którym wyrazem ciągu mamy do czynienia.**

Przykładowo, gdy w zadaniu mamy podać ósmy wyraz ciągu, obliczamy jego wartość dla n = 8.

$a_8 = 8 \cdot 1 + 1 = 16 + 1 = 17$

Ciąg może również być zapisany **jako szereg wyrażeń po przecinku**. Wyrażenia te są wówczas kolejnymi wyrazami ciągu. Przykład: 3, 6, 9, 12, 15 . . .

Z podanego w ten sposób ciągu możemy **wypisać jego poszczególne wyrazy** (tu: pięć pierwszych wyrazów), a nawet ustalić wzór ciągu.

$a_1 = 3 \quad a_2 = 6 \quad a_3 = 9 \quad a_4 = 12 \quad a_5 = 15$

❖ ***Wykres ciągu*** rysuje się w zasadzie tak samo, jak wykres funkcji.

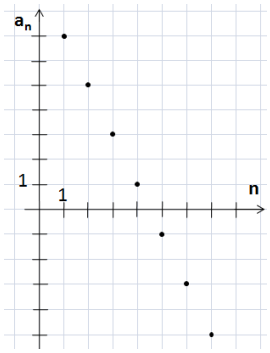
Nie będzie on jednak linią ciągłą, ale zbiorem punktów dla argumentów naturalnych (1, 2, 3 …).

Jest to pewne ułatwienie, bo niezależnie od typu funkcji, każdy ciąg będziemy rysować tak samo.

Przykład: $a_n = -2n + 9$

I. Obliczamy kilka początkowych punktów. Możemy zapisać je w tabeli:

n	1	2	3	4	5	6	7	
$\mathbf{a_n}$	7	5	3	1	-1	-3	-5	



II. Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych (**nie łączymy ich linią ciągłą**). Układ współrzędnych jest nieco inny niż dla funkcji. Przyjmujemy inne oznaczenia osi układu oraz „obcinamy" część układu dla argumentów ujemnych, które w ciągach nie występują.

15.2 Monotoniczność ciągu

Aby zbadać monotoniczność ciągu o podanym wzorze, musimy wykonać odejmowanie i zinterpretować otrzymany wynik: $a_{n+1} - a_n$

Interpretacja wyniku:

- gdy jest liczbą dodatnią, ciąg jest rosnący,
- gdy jest liczbą ujemną, ciąg jest malejący,
- gdy wynosi zero, ciąg jest stały,
- gdy jest wyrażeniem z *n*, musimy ustalić, czy niezależnie od *n* wartość wyrażenia jest dodatnia (ciąg rosnący); ujemna (ciąg malejący); czy raz jest dodatnia raz ujemna (ciąg nie jest monotoniczny).

Przykład:

$a_n = n^2 - 10n - 2$ **Zapisujemy wyrażenie a_{n+1} i upraszczamy je.**

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 10(n+1) - 2 = n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 - 2 = n^2 - 8n - 11$$

Teraz możemy wykonać odejmowanie: $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = n^2 - 8n - 11 - (n^2 - 10n - 2) = n^2 - 8n - 11 - n^2 + 10n + 2 = 2n - 9$$

Otrzymany wynik jest wyrażeniem ze zmienną „n". Należy ustalić, czy niezależnie od „n" wartość będzie zawsze dodatnia, ujemna, czy raz dodatnia raz ujemna. Tutaj otrzymaliśmy wyrażenie: 2n -9. Należy zauważyć, że dla małych wartości „n" (np. dla n=1), wartość wyrażenia będzie ujemna (2·1-9 = -7), a dla większych wartości będzie dodatnia (np. dla n=10: 2·10−9 = 11). W związku z tym wyciągamy wniosek, że ciąg nie jest monotoniczny.

Odpowiedź: Ciąg nie jest monotoniczny.

www.matematykam.pl

15.3 Podstawowe pytania (który wyraz ciągu ma daną wartość?...)

Na podstawie wzoru ciągu, oprócz określenia jego monotoniczności (poprzedni podrozdział), powinniśmy potrafić odpowiedzieć na kilka podstawowych pytań, takich jak: który wyraz ciągu ma daną wartość?; ile wyrazów ujemnych ma dany ciąg? itp. Odpowiedź na każde z powyższych pytań wymaga w rozwiązania konkretnego równania/nierówności.

Przykład 1. Czy istnieje wyraz ciągu o wzorze ogólnym an = 3n – 5 o wartości 2? Aby odpowiedzieć na to pytanie, podstawiamy do wzoru wartość 2 (uwaga: wartość wyrazu to a_n), a następnie rozwiązujemy powstałe równanie. Obliczamy w ten sposób *n* (numer wyrazu). Kluczowym jest fakt, że *n* przyjmuje wartości naturalne (1, 2, 3..). Jeżeli otrzymamy inny wynik, oznacza to, że nie ma takiego wyrazu ciągu.

$$2 = 3n - 5$$
$$-3n = -7 \quad /\div(-3)$$
$$n = 2\frac{1}{3}$$

Odpowiedź: Nie istnieje wyraz ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 3n - 5$ o wartości 2.

Przykład 2. Ile wyrazów ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 2n - 15$ przyjmuje wartość ujemną? Szukamy takich *n*, dla których po podstawieniu do wzoru ciągu, otrzymamy wartość mniejszą od zera (< 0). Będziemy mieć do czynienia z nierównością:

$$2n - 15 < 0$$
$$2n < 15 \quad /\div 2$$
$$n < 7{,}5$$

Wyrazy o numerze mniejszym od 7,5 (pamiętajmy: muszą to być liczby naturalne), to wyrazy o numerach: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Mamy więc siedem takich wyrazów.

Odpowiedź: Wartości ujemne przyjmuje siedem wyrazów ciągu.

15.4 Ciąg arytmetyczny (wzór ogólny, monotoniczność, sprawdzanie czy dany ciąg jest arytmetyczny lub dla jakiej wartości parametru jest arytmetyczny, określanie wzoru ciągu, średnia arytmetyczna, suma wyrazów ciągu)

❖ ***Wzór ogólny i zależność między wyrazami ciągu***

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: CIĄGI):
- Ciąg arytmetyczny

Wzór na *n-ty* wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy *r*:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego powstają poprzez dodawanie konkretnej liczby, którą nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego i oznaczamy literą **r**. Do pełnego opisu ciągu arytmetycznego oprócz różnicy, potrzebujemy wartości pierwszego wyrazu ciągu: $\mathbf{a_1}$.

www.matematykam.pl

Przykład: 2, 5, 8, 11, 14 . . .

Dla danego ciągu różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami, czyli liczba jaką dodajemy, aby uzyskać następny wyraz, wynosi **3**, a wartość pierwszego wyrazu wynosi **2**: $a_1 = 2,\ r = 3$

Znając **różnicę** i **wartość pierwszego wyrazu**, możemy zapisać wzór ogólny ciągu.

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1)3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$$

❖ ***Monotoniczność*** – ciąg arytmetyczny jest zawsze monotoniczny. W celu oceny jego monotoniczności, nie są konieczne żadne obliczenia. Jedyną potrzebną informacją jest różnica ciągu (r):

- rosnący, gdy różnica jest dodatnia (r > 0), - malejący, gdy różnica jest ujemna (r < 0),
- stały, gdy różnica wynosi zero (r = 0).

❖ ***Sprawdzanie czy dany ciąg jest arytmetyczny/dla jakiej wartości parametru jest arytmetyczny.***

Mając dane kilka początkowych wyrazów: różnica dwóch kolejnych wyrazów zawsze musi wynosić tyle samo, tzn. drugi wyraz minus pierwszy musi się równać trzeciemu wyrazowi minus drugi musi się równać czwartemu wyrazowi minus trzeci itd. Przykład:

1, 9, 17, ...

$$9 - 1 = 17 - 9$$
$$8 = 8$$

L = P

Oznacza to, że ciąg jest arytmetyczny.

Odpowiedź: Ciąg jest arytmetyczny

Mając dany wzór ciągu, musimy wykonać odejmowanie: $a_{n+1} - a_n$, tak jak podczas sprawdzania monotoniczności ciągu (podrozdział 15.2).

Dany ciąg jest arytmetyczny, jeżeli otrzymamy wartość liczbową.

Przykład:

$a_n = 6n^2$

$$a_{n+1} = 6(n+1)^2$$
$$a_{n+1} = 6(n^2 + 2n + 1)$$
$$a_{n+1} = 6n^2 + 12n + 6$$

$$a_{n+1} - a_n = 6n^2 + 12n + 6 - 6n^2 = 12n + 6$$

Nie otrzymaliśmy wartości liczbowej, tylko wyrażenie ze zmienną „n", co oznacza, że dany ciąg nie jest arytmetyczny.

Dla jakiej wartości x podane wyrażenia są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Przykład: $2x,\ 3x+8,\ 28$. Rozwiązujemy równanie: drugi wyraz – pierwszy = trzeci - drugi

$$3x + 8 - 2x = 28 - (3x + 8)$$
$$x + 8 = 28 - 3x - 8$$
$$x + 3x = 20 - 8$$
$$4x = 12 \quad /\div 4$$
$$x = 3$$

❖ ***Określanie wzoru ciągu***

Jak już wiemy do zapisu wzoru ogólnego potrzebujemy dwóch wartości: $\mathbf{a_1}$ oraz **r**. Gdy nie są one podane, należy je obliczyć.

Gdy brakuje nam tylko jednej z nich (a_1 lub r), możemy wspomóc się wzorem ogólnym.

Przykład: Mamy podane: $r=-5$, $a_6=-15$.

Podstawiamy wielkości do wzoru ogólnego:

$a_n=a_1+(n-1)r$; $-15=a_1+(6-1)\cdot(-5)$ i z tak powstałego równania obliczamy brakującą wartość (tu a_1).

Różnicę (r) często możemy obliczyć w bardzo prosty sposób jeżeli mamy podane dwa kolejne wyrazy ciągu (różnica jest równa: następny wyraz - poprzedni).

Przykład: Mamy podane: $a_5=21$, $a_6=26$

stąd $r=26-21=5$

Gdy mamy podane dwa odległe wyrazy ciągu, mamy dwie możliwości – podstawiamy oba do wzoru ogólnego i powstaje nam układ równań albo

„ŁĄCZYMY" WYRAZY za pomocą jednego równania. Mając podane dwa wyrazy należy ustalić ile „r" je dzieli. Przykład: Mamy podane wyrazy $a_3=7$, $a_8=17$. Wyraz trzeci i ósmy „dzieli" 5r (8-3=5), a więc możemy zapisać, że wyraz ósmy, to wyraz trzeci plus 5r: $a_8=a_3+5r$.

Do tak powstałego równania podstawiamy wartości podanych wyrazów i obliczamy różnicę (r).

❖ ***Średnia arytmetyczna***

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: CIĄGI):
Między sąsiednimi wyrazami ciągu zachodzi związek:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \text{ dla } n\geq 2$$

Przykład: Obliczymy wartość dziesiątego wyrazu ciągu arytmetycznego, jeżeli jego dziewiąty wyraz wynosi 15, a jedenasty 29.

$$a_{10}=\frac{a_9+a_{11}}{2} \qquad a_{10}=\frac{15+29}{2}=\frac{44}{2}=22$$

www.matematykam.pl

❖ ***Suma wyrazów ciągu***

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: CIĄGI):
Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych *n* wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n$$

Powyżej widać, że w rzeczywistości mamy do dyspozycji dwa wzory, spośród których wybieramy ten, który w danej chwili jest dla nas bardziej wygodny. Oczywiście nie zawsze mamy wszystkie niezbędne dane do obliczenia sumy początkowych n wyrazów ciągu. W takiej sytuacji obliczamy brakujące wielkości, korzystając z jednego z podejść opisanych w poprzednich podpunktach (***określanie wzoru ciągu, średnia arytmetyczna***).

Wykorzystanie wzoru na sumę przedstawimy na przykładzie: Obliczymy sumę dziesięciu pierwszych wyrazów ciągu, jeżeli pierwszy wyraz ma wartość 2, a dziesiąty 38.

$a_1=2$, $a_{10}=38$ **Wybieramy pierwszą „wersje" wzoru:**

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2+38}{2}\cdot 10=\frac{40}{2}\cdot 10=20\cdot 10=200$$

Specyficznym typem zadania wymagającego obliczenia sumy liczb, jest takie zadanie, w którym niewiadomą jest numer ostatniego wyrazu.

Przykład: Oblicz sumę liczb, jeżeli stanowią kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego:

$-14-8-2+4+10+\ldots+58$

Mamy podane wartości pierwszych wyrażeń i ostatniego, ale nie znamy jego numeru.

$a_1=-14 \quad a_n=58$

W pierwszej kolejność obliczamy różnicę ciągu, odejmując drugi wyraz od pierwszego:

$r=-8-(-14)=-8+14=6$

Podstawiamy pierwszy wyraz, ostatni i różnicę do wzoru ogólnego i obliczmy numer ostatniego wyrazu (n).

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot r$$
$$58=-14+(n-1)\cdot 6$$
$$58=-14+6n-6$$
$$58=6n-20$$
$$58+20=6n$$
$$78=6n \quad /\div 6$$
$$n=13$$

Mamy już wszystkie niezbędne informacje do obliczenia podanej sumy:

$$S_{13}=\frac{a_1+a_{13}}{2}\cdot 13=\frac{-14+58}{2}\cdot 13=286$$

15.5 Ciąg geometryczny (wzór ogólny, sprawdzanie czy dany ciąg jest geometryczny lub dla jakiej wartości parametru jest geometryczny, określanie wzoru ciągu, średnia geometryczna, suma wyrazów ciągu)

www.matematykam.pl

❖ ***Wzór ogólny i zależność między wyrazami ciągu***

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: CIĄGI):

- Ciąg geometryczny

Wzór na *n-ty* wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1} \text{ dla } n\geq 2$$

Ciąg geometryczny to ciąg, którego kolejne wyrazy powstają poprzez przemnożenie poprzednich wyrazów przez liczbę, którą nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego i oznaczamy: **q**. Do pełnego opisu ciągu geometrycznego oprócz ilorazu, tak jak w przypadku ciągu arytmetycznego potrzebujemy wartości pierwszego wyrazu ciągu: $\mathbf{a_1}$.

Przykład: 3, 6, 12, 24, 48 . . .

Dla danego ciągu **iloraz ciągu**, czyli liczba przez jaką mnożymy, aby uzyskać następny wyraz wynosi **2**, a wartość pierwszego wyrazu wynosi **3**: $a_1=3,\ q=2$

Znając **iloraz** i **wartość pierwszego wyrazu**, możemy zapisać wzór ogólny ciągu.

$$a_n=3\cdot 2^{n-1}$$

❖ ***Sprawdzanie czy dany ciąg jest geometryczny/dla jakiej wartości parametru jest geometryczny.***

Mając dane kilka początkowych wyrazów: iloraz dwóch kolejnych wyrazów zawsze musi wynosić tyle samo, tzn. drugi wyraz dzielony przez pierwszy musi się równać trzeciemu wyrazowi dzielonemu przez drugi itd. Przykład:

1, 9, 18, ...

$9\div 1=18\div 9$

$1\neq 2$

L ≠ P

Oznacza to, że ciąg nie jest geometryczny.

Odpowiedź: Ciąg nie jest geometryczny

Mając dany wzór ciągu: zapisujemy wyrażenie: a_{n+1}, a następnie wykonujemy dzielenie: a_{n+1}/a_n Dany ciąg jest geometryczny, jeżeli otrzymamy wartość liczbową. Przykład:

$$a_n=2^{n+2} \quad a_{n+1}=2^{n+1+2}=2^{n+3}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+3}}{2^{n+2}}=\frac{2^n\cdot 2^3}{2^n\cdot 2^2}=\frac{8}{4}=2$$

Otrzymaliśmy wartość liczbową, a więc dany ciąg jest geometryczny.

Dla jakiej wartości x podane wyrażenia są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

Przykład: $9,\ 3x,\ 10x-9$. Rozwiązujemy równanie (wynikające ze wzoru na średnią geometryczną – podpunkt *średnia geometryczna*): (środkowy wyraz)^2 = pierwszy wyraz · trzeci wyraz.
W efekcie otrzymujemy do rozwiązania równanie kwadratowe (podrozdział 9.5).

$$9x^2 = 9(10x-9)$$
$$9x^2 = 90x-81$$
$$9x^2-90x+81=0 \quad /\div 9$$
$$x^2-10x+9=0$$

$$\Delta = (-10)^2-4\cdot 1\cdot 9 = 100-36 = 64$$
$$x_1 = \frac{10-\sqrt{64}}{2} = \frac{10-8}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{10+\sqrt{64}}{2} = \frac{10+8}{2} = 9$$

❖ ***Określanie wzoru ciągu***

Do zapisu wzoru ogólnego potrzebujemy $\mathbf{a_1}$ oraz **q**. Gdy nie są one podane, należy je obliczyć.

Gdy brakuje nam tylko jednej z nich (a_1 lub q), możemy wspomóc się wzorem ogólnym.
Przykład: Mamy podane: $q=2$, $a_4=40$.
Podstawiamy wielkości do wzoru ogólnego:
$a_n = a_1\cdot q^{n-1}$; $40 = a_1\cdot 2^{4-1}$ i z tak powstałego równania obliczamy brakującą wartość (tu a_1).

Iloraz (q) często możemy obliczyć w bardzo prosty sposób, jeżeli mamy podane dwa kolejne wyrazy ciągu (iloraz jest równy: następny wyraz/ poprzedni).
Przykład: Mamy podane: $a_6=12$, $a_7=36$
stąd $q=\frac{36}{12}=3$

www.matematykam.pl

Gdy mamy podane dwa odległe wyrazy ciągu, mamy dwie możliwości – podstawiamy oba do wzoru ogólnego i powstaje nam układ równań albo:
„ŁĄCZYMY" WYRAZY za pomocą jednego równania. Mając podane dwa wyrazy należy ustalić ile „q" je „dzieli". Przykład: Mamy podane wyrazy $a_6=3$, $a_9=-24$. Wyraz szósty i dziewiąty „dzieli" trzy q (9-6=3), a więc możemy zapisać, że wyraz dziewiąty, to wyraz szósty razy q^3: $a_9 = a_6\cdot q^3$. Do tak powstałego równania podstawiamy wartości podanych wyrazów i obliczamy iloraz (q).

❖ ***Średnia geometryczna***

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: CIĄGI):
Między sąsiednimi wyrazami ciągu zachodzi związek:
$$a_n^2 = a_{n-1}\cdot a_{n+1} \text{ dla } n\geq 2$$

Przykład: Obliczymy wartość szóstego wyrazu ciągu geometrycznego, jeżeli jego piąty wyraz wynosi 7, a siódmy wyraz ma wartość 63.

$a_6^2 = a_5\cdot a_7$

$$a_6^2 = 7\cdot 63 = 441$$
$$a_6 = -21 \text{ v } a_6 = 21$$

❖ ***Suma wyrazów ciągu***

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: CIĄGI):
Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych *n* wyrazów ciągu geometrycznego:
$$S_n = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \text{ dla } q\neq 1$$

Wykorzystanie wzoru na sumę przedstawimy na przykładzie: Obliczymy sumę siedmiu pierwszych wyrazów ciągu, jeżeli pierwszy wyraz ma wartość 1, a iloraz wynosi -3.

$a_1=1,\ q=-3$

$$S_7 = a_1 \cdot \frac{1-q^7}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-(-3)^7}{1-(-3)} = 1 \cdot \frac{1-(-2187)}{1+3} = 1 \cdot \frac{2188}{4} = 547$$

Specyficznym typem zadań wymagających obliczenia sumy liczb, są takie zadania, w których niewiadomą jest numer ostatniego wyrazu.

Przykład: Oblicz sumę liczb, jeżeli stanowią kolejne wyrazy ciągu geometrycznego:

$$4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{512}$$

$a_1 = 4,\ a_n = \frac{1}{512}$ Mamy podaną wartość pierwszego wyrażenia i ostatniego, ale nie znamy jego numeru.

$q = 2 \div 4 = \frac{1}{2}$ W pierwszej kolejność obliczamy iloraz ciągu (podzielimy drugi wyraz przez pierwszy):

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$\frac{1}{512} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ Podstawiamy wyraz pierwszy, ostatni i iloraz do wzoru ogólnego i obliczamy numer ostatniego wyrazu (n).

Otrzymaliśmy równanie wykładnicze (podrozdział 11.2).

$\frac{1}{512} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad /\div 4$ Dzielimy równanie przez 4, aby otrzymać odpowiednią formę równania wykładniczego (wyrażenie wykładnicze po jednej stronie, a liczba po drugiej).

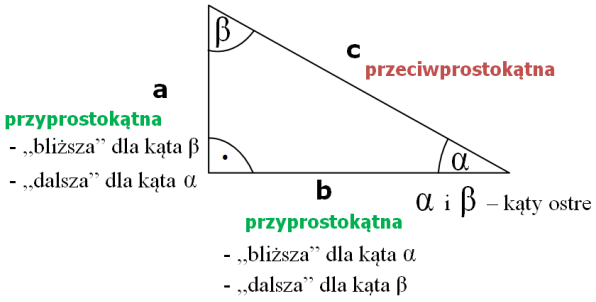
$$\frac{1}{2048} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$11 = n-1$$
$$11+1 = n$$
$$n = 12$$

$$S_{12} = 4 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}} = 7\frac{511}{512}$$

16. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

16.1 Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

Na poziomie maturalnym obowiązuje nas znajomość trzech funkcji:
- sinus (sin), - cosinus (cos), - tangens (tg). Funkcje odnoszą się do konkretnych kątów i są równe stosunkom odpowiednich boków w trójkącie prostokątnym.



$$\text{sinus kąta} = \frac{\text{przyprostokątna „dalej położona"}}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\text{cosinus kąta} = \frac{\text{przyprostokątna „bliżej położona"}}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\text{tangens kąta} = \frac{\text{przyprostokątna „dalej położona"}}{\text{przyprostokątna „bliżej położona"}}$$

Dla kąta α narysowanego trójkąta: $\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ tg\alpha = \frac{a}{b}$

www.matematykam.pl

16.2 Wartości funkcji trygonometrycznych

Wartość danej funkcji, danego kąta możemy odczytać z tablic wartości funkcji, umieszczonych na końcu tablic matematycznych, dostępnych podczas matury. Mają one jednak nieco inną formę, niż te zamieszczone w zdecydowanej większości szkolnych podręczników. Są w nich zawarte wartości dla trzech funkcji (sinus, cosinus, tangens), ale funkcje sinus i cosinus mają wspólną kolumnę. Miarę kąta dla funkcji sinus i tangens odczytujemy w pierwszej kolumnie (jest oznaczony jako kąt α), a miarę kąta dla funkcji cosinus odczytujemy w czwartej kolumnie (jest oznaczony jako kąt β). Przedstawimy sposób „czytania" tablic na przykładach:

- gdy odczytujemy wartość funkcji dla danego kąta; Przykład:

sin7°= 0,1219 tg11°=0,1944 cos84°=0,1045

α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	β [°]
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78

- gdy odczytujemy miarę kąta. Przykład:

sin α = 0,07 tg α = 0,17 cos α = 0,15

α ≈ 4° α ≈ 10° α ≈ 81°

α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	β [°]
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78

❖ ***Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów: 30°, 45°, 60°.***

W tablicach matematycznych mamy dla funkcji tych kątów osobną tabelę (w dziale TRYGONOMETRIA). Tu każda funkcja jest zapisana osobno (tło interesujących nas treści jest niebieskie).

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

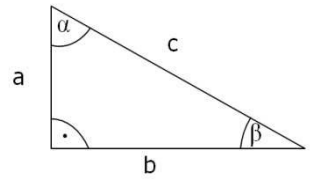
www.matematykam.pl

Przykładowo: $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

❖ ***Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych.***

Korzystamy z nich w zadaniach dotyczących zarówno figur płaskich jak i brył, w celu obliczania długości poszczególnych boków, krawędzi lub kątów. Gdy w zdaniu pojawia się polecenie: „**rozwiąż trójkąt prostokątny**”, mamy obliczyć długości wszystkich boków i miary wszystkich kątów trójkąta. Wykorzystanie funkcji w zadaniach, przedstawimy na przykładzie, wymagającym rozwiązania trójkąta prostokątnego. Przykład:

Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość: 5cm oraz $5\sqrt{3}$cm.



dane:
a = 5cm
b= $5\sqrt{3}$cm

szukane:
c = ?
α = ?
β = ?

W podanym trójkącie prostokątnym brakuje nam długości przyprostokątnej oraz miary kątów ostrych.

Nie znamy żadnego kąta ostrego. W celu obliczenia miary kąta, wybieramy funkcję, dającą nam stosunek boków, których długość znamy. Mamy dwie przyprostokątne, dlatego wybieramy funkcję tangens.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{5\sqrt{3}\text{cm}}{5\text{cm}} = \sqrt{3}$$

Znając wartość funkcji, możemy stwierdzić, że kąt ma miarę 60°.

$$\alpha = 60°$$

PRZYPOMINAMY: suma kątów w trójkącie wynosi 180°:

$$\beta = 180° - 60° - 90° = 30°$$

Brakuje nam wartości przeciwprostokątnej (c). Gdy mamy obliczyć długość boku, wybieramy taką funkcję, aby znajdował się w niej szukany bok, a pozostałe wielkości (drugi bok oraz kąt) były znane. Wybraliśmy funkcję sinus kąta β.

$$\sin\beta = \frac{a}{c} \qquad \sin 30° = \frac{5\text{cm}}{c}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5\text{cm}}{c}$$

$$c = 2 \cdot 5\text{cm}$$

$$c = 10\text{cm}$$

16.3 Wzory (związki między funkcjami tego samego kąta)

WZORY z tablic matematycznych (w dziale: TRYGONOMETRIA):

- Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Wykorzystanie powyższych wzorów przedstawimy na dwóch przykładach, w których znając wartość jednej z funkcji, obliczamy pozostałe.

- gdy mamy podany sinus lub cosinus;

Przykład: $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ Korzystamy z pierwszego wzoru aby obliczyć cosinus.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\left(\frac{12}{13}\right)^2+\cos^2\alpha=1$$
$$\frac{144}{169}+\cos^2\alpha=1$$
$$\cos^2\alpha=\frac{25}{169}$$
$$\cos\alpha=\frac{5}{13}$$

Korzystamy z drugiego wzoru, aby obliczyć tangens.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5}=\frac{12}{5}$$

- gdy mamy podany tangens.

Przykład: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$

Musimy skorzystać **jednocześnie z obu wzorów „łącząc" je w jeden.**

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\qquad \sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

Przekształcamy drugi wzór do postaci $\sin\alpha = \ldots$ Podstawiamy uzyskane wyrażenie: $\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$ do pierwszego wzoru.

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\frac{25}{9}\cos^2\alpha=1$$
$$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$$
$$\cos\alpha=\frac{3}{5}$$

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\sin\alpha=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$$

Ostatnią funkcję (sinus) możemy obliczyć z obu wzorów. Najlepiej skorzystać z przekształconej wersji drugiego wzoru, którą uzyskaliśmy wcześniej (niebieska ramka).

16.4 Tożsamości trygonometryczne

Tożsamości trygonometryczne, to równania złożone z funkcji trygonometrycznych, których prawdziwość mamy udowodnić. W tym celu **musimy przekształcić jedną lub obie strony równania, korzystając ze wzorów przedstawionych w poprzednim podrozdziale oraz innych przekształceń.** Niestety nie da się „na pierwszy rzut oka" określić, którą stronę równania najlepiej przekształcić i w jaki sposób. Każda tożsamość jest nieco inna i wymaga „wyczucia".

Przykład:

www.matematykam.pl

Wykorzystujemy wzór skróconego mnożenia.

„Rozbijamy" ułamek na dwa.

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}-1=(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha$$

Pierwszy ułamek zamieniamy na funkcję tangens zgodnie z drugim wzorem. Drugi ułamek skraca się do 1.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-1=1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha$$

Wykorzystujemy pierwszy wzór:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

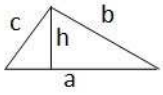
$$\operatorname{tg}\alpha+1-1=1-\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)+\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha=1-\sin^2\alpha-1+\sin^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha$$

17. PLANIMETRIA (FIGURY PŁASKIE)

UWAGA! Większość wzorów w tym rozdziale jest zawarta w tablicach matematycznych dostępnych podczas egzaminu maturalnego w dziale PLANIMETRIA. Te, których tam nie znajdziemy, są obramowane niebieską ramką.

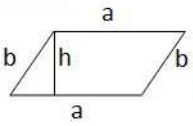
17.1 Wzory dla figur płaskich (obwody, pola i inne)

trójkąt



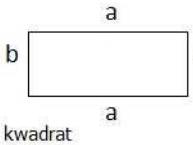
$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

równoległobok



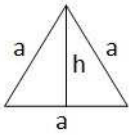
$$P = a \cdot h$$

prostokąt



$$P = a \cdot b$$

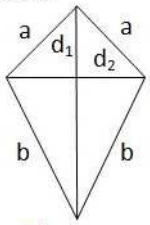
trójkąt równoboczny



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

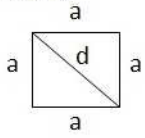
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

deltoid



$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

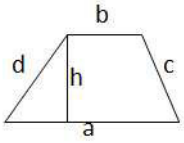
kwadrat



$$P = a^2$$

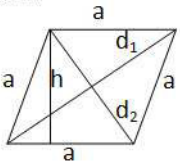
$$d = a\sqrt{2}$$

trapez



$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

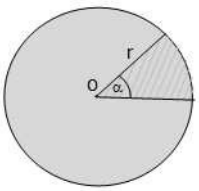
romb



$$P = a \cdot h$$

$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

koło



$$P = \pi r^2$$

$$Ob = 2\pi r$$

wycinek koła

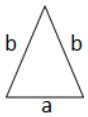
$$L = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r$$

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

W powyższym zestawie wzorów jedyną figurą, dla której zapisaliśmy wzór na obwód, jest koło. Dla pozostałych figur, możemy w łatwy sposób „stworzyć" wzór samodzielnie. Wystarczy pamiętać, że obwód jest równy sumie długości wszystkich boków. Przykład: trójkąt równoramienny:

Zapisujemy sumę boków (a, b, b), przy czym „grupujemy" te same boki (b + b = 2b). Stąd:

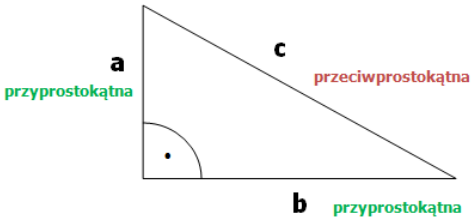
$Ob = a + 2b$



17.2 Najważniejsze twierdzenia (Pitagorasa, Talesa)

www.matematykam.pl

❖ ***Twierdzenie Pitagorasa***



$$a^2 + b^2 = c^2$$

przyprostokątna przyprostokątna przeciwprostokątna

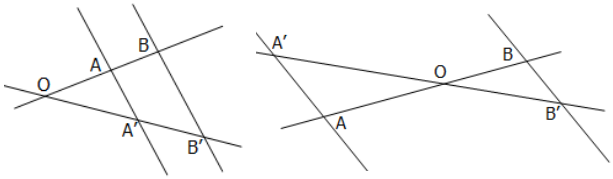
Przykład:

$a = 4cm$
$b = ?$
$c = 5cm$

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(4cm)^2 + b^2 = (5cm)^2$$
$$16cm^2 + b^2 = 25cm^2$$
$$b^2 = 25cm^2 - 16cm^2$$
$$b^2 = 9cm^2$$
$$b = 3cm$$

❖ ***Twierdzenie Talesa***

W tablicach matematycznych znajdziemy tylko jedną, podstawową równość, wynikającą z twierdzenia Talesa. Jest ich więcej, ale w zupełności wystarczy, że nauczymy się jeszcze jednej (niebieska ramka).

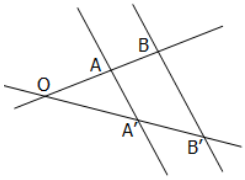


$$\frac{|OA|}{|OA'|}=\frac{|OB|}{|OB'|}$$

Dodatkowa równość ma dwie „wersje".

$$\frac{|OA|}{|AA'|}=\frac{|OB|}{|BB'|} \qquad \frac{|OA'|}{|AA'|}=\frac{|OB'|}{|BB'|}$$

Wybór danej równości jest uwarunkowany tym, jaki odcinek mamy obliczyć i jakie odcinki są dane. Wybrane przez nas równanie musi zawierać odcinek, którego długość chcemy obliczyć, ale pozostałe wielkości muszą być znane. Przykład:



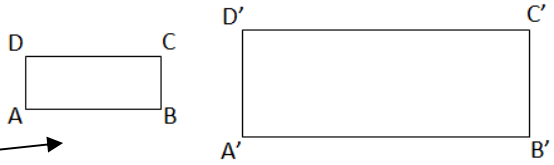
$|OA| = 4cm$
$|OB| = 6cm$
$|AA'| = 2cm$
$|BB'| = ?$

Wybieramy pierwszą równość z ramki.

$$\frac{|OA|}{|AA'|}=\frac{|OB|}{|BB'|}$$
$$\frac{4cm}{2cm}=\frac{6cm}{|BB'|}$$
$$4cm\cdot|BB'|=12cm^2 \quad /\div(4cm)$$
$$|BB'|=3cm$$

17.3 Podobieństwo figur płaskich

Mając dwie figury podobne, należy ustalić, która figura spośród tych dwóch jest figurą podobną. Drugą figurę będziemy nazywać umownie – „podstawową". Przykład: Mając sformułowanie: trójkąt EFG jest podobny do trójkąta ABC, stwierdzamy, że trójkątem „podstawowym" jest trójkąt ABC, a trójkątem podobnym EFG. W zadaniach nie zawsze mamy informację, która pozwala nam ustalić, która figura jest „podstawowa", a która podobna. W takiej sytuacji sami o tym decydujemy. Oznaczenia figury podobnej, to często te same litery alfabetu, ale z znakiem ‘ (prim). Przykład:



Skala podobieństwa mówi nam o tym, ile razy figura podobna jest większa lub mniejsza od figury „podstawowej". Oznaczamy ją literą **k**. Ponadto, mając dane dwie figury podobne, możemy zapisać szereg równości, złożonych ze stosunków odpowiadających sobie boków, obwodów, pól. Pamiętajmy, żeby zawsze dzielić figurę **podobną** przez „**podstawową**". Każdy ze stosunków jest powiązany ze skalą podobieństwa:

- stosunki odpowiednich boków i obwodów są sobie równe i zarazem równe skali;

$$\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|B'C'|}{|BC|}=\frac{Ob'}{Ob}=k$$

- stosunki pól są równe skali do kwadratu.

$$\frac{P'}{P}=k^2$$

www.matematykam.pl

Przykład: Oblicz pole kwadratu ABCD jeżeli jest podobny w skali 2 do kwadratu EFGH o polu $4cm^2$.

$P_{EFGH} = 4cm^2$
$k = 2$
$P_{ABCD} = ?$

Kwadrat ABCD jest podobny do kwadratu EFGH. Tak więc figurą „podstawową" jest kwadrat EFGH, a podobną kwadrat ABCD.

$$\frac{P_{ABCD}}{P_{EFGH}}=k^2$$
$$\frac{P_{ABCD}}{4cm^2}=2^2$$
$$\frac{P_{ABCD}}{4cm^2}=4$$
$$P_{ANBCD}=16cm^2$$

17.4 Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów

Są dość szczegółowo opisane w tablicach matematycznych (dział PLANIMETRIA).

❖ ***Trójkąty przystające***

Dwa trójkąty są przystające, gdy są takie same, choć jeden może być lustrzanym odbiciem drugiego.

Cechy przystawania:

- „bok – bok – bok” (BBB); Boki trójkątów mają takie same długości.	***- „bok – kąt – bok” (BKB);*** Dwa boki jednego trójkąta są równe dwóm bokom drugiego, a kąty między nimi mają taką samą miarę.	***- „kąt – bok – kąt” (BBB).*** Jeden z boków pierwszego trójkąta jest równy jednemu z boków drugiego trójkąta, a przyległe do tego boku kąty, w obu trójkątach, mają tą samą miarę.

❖ ***Trójkąty podobne***

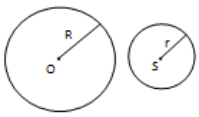
Zapis: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ czytamy: trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DEF. Cechy podobieństwa:

- „bok – bok – bok” (BBB); Długości boków jednego trójkąta, są proporcjonalne do długości boków drugiego trójkąta. To znaczy, że zapisując stosunki odpowiadających boków, zawsze otrzymamy z nich taką samą wartość (skalę).	***- „bok – kąt – bok” (BKB);*** Para boków w obu trójkątach ma proporcjonalne długości, a kąt między nimi ma taką samą miarę.	***- „kąt – kąt – kąt” (KKK).*** Kąty w obu trójkątach mają taką samą miarę.

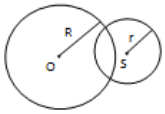
17.5 Wzajemne położenie: dwóch okręgów, prostej i okręgu

❖ ***Wzajemne położenie dwóch okręgów***

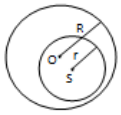
Rozłączne zewnętrznie



Przecinające się

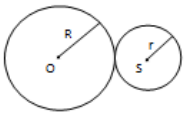


Rozłączne wewnętrznie

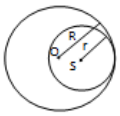


www.matematykam.pl

Styczne zewnętrznie
(mają jeden punkt wspólny).

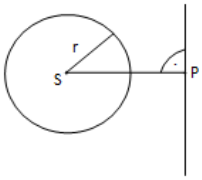


Styczne wewnętrznie
(mają jeden punkt wspólny).

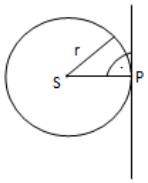


❖ ***Wzajemne położenie prostej i okręgu***

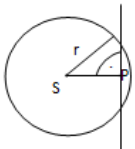
Nie mają punktów wspólnych



Prosta jest styczna do okręgu – mają dokładnie jeden punkt wspólny.



Prosta jest sieczną okręgu – mają dwa punkty wspólne.

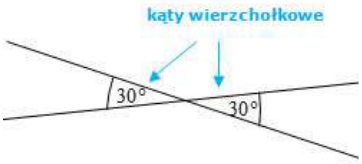


Gdy w zadaniu mamy podane: równanie dwóch okręgów (podrozdział 8.9) lub równanie okręgu i prostej (podrozdziały 8.2, 8.3 i 8.9) i mamy zbadać ich wzajemne położenie, najłatwiej jest narysować oba elementy w układzie współrzędnych, a ich wzajemne położenie ocenić „wzrokowo”.

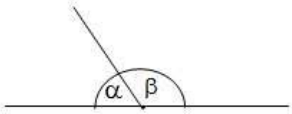
17.6 Kąty

❖ ***Kąty wierzchołkowe, przyległe, naprzemianległe***

Kąty wierzchołkowe mają taką samą miarę.

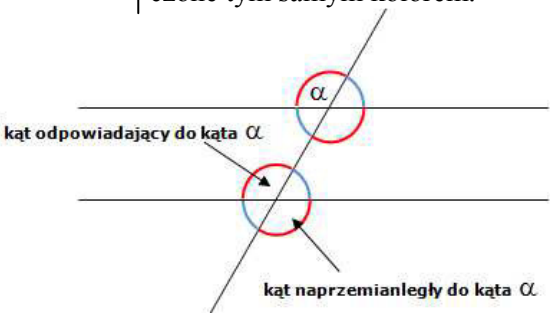


Kąty przyległe, to kąty „leżące" na jednej prostej. Ich suma wynosi 180°.



$$\alpha + \beta = 180°$$

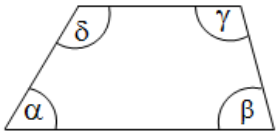
Kąty odpowiadające i naprzemianległe mają taką samą miarę. Kąty o tej samej miarze są oznaczone tym samym kolorem.



❖ ***Kąty w trójkątach i czworokątach***

Suma miar wszystkich kątów wewnętrznych w każdym czworokącie wynosi 360°.

- trapez; suma miar sąsiednich kątów przy krótszej i dłuższej podstawie wynosi 180°.



$$\alpha + \delta = 180°$$
$$\beta + \gamma = 180°$$

- równoległobok: przeciwległe kąty mają taką samą miarę, a suma dwóch różnych (sąsiadujących) kątów wynosi180°.

$$\alpha + \beta = 180°$$

www.matematykam.pl

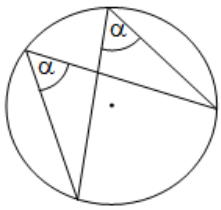
Suma miar wszystkich kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi 180°.

- w trójkącie równobocznym: wszystkie kąty mają tą samą miarę, która wynosi 60°,

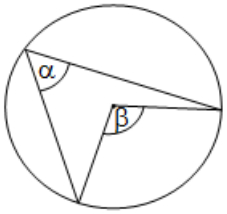
- w trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają taką samą miarę.

❖ ***Kąty w okręgu***

- dwa kąty wpisane, oparte na tym samym łuku, mają taką samą miarę;

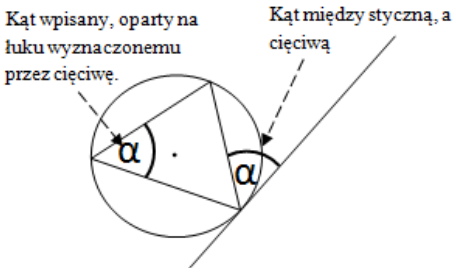


- jeżeli mamy dane dwa kąty: środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku, to kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego;



$$\beta = 2\alpha$$

- kąt między styczną a cięciwą okręgu jest równy kątowi wpisanemu, opartemu na łuku, wyznaczonemu przez końce cięciwy.



17.7 Wielokąty

Żadnego z poniższych wzorów nie znajdziemy w tablicach matematycznych!

Wzór na ***liczbę przekątnych*** wielokąta

$$\frac{(n-3)n}{2}$$

Wzór na ***sumę miar kątów wewnętrznych*** wielokąta

$$(n-2)\cdot 180°$$

Otrzymujemy sumę wszystkich kątów wielokąta.

Wzór na ***miarę kąta wewnętrznego*** wielokąta foremnego

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Wielokąt foremny ma wszystkie boki takiej samej długości i wszystkie kąty takiej samej miary.

Otrzymujemy miarę jednego kąta.

- n we wszystkich wzorach to liczba boków/kątów danego wielokąta.

Przykład: Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wynosi 900°. Jaki to wielokąt?
Wykorzystujemy wzór na sumę miar kątów wewnętrznych, ponieważ tę wielkość mamy podaną:

$(n-2)\cdot 180^\circ = 900^\circ \quad /\div 180^\circ$

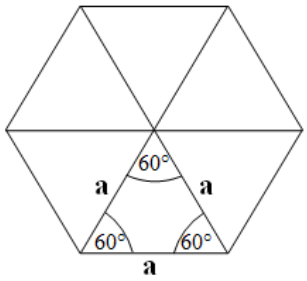
$n-2=5$

$n=7$

Odpowiedź: Szukanym wielokątem jest siedmiokąt.

❖ ***Sześciokąt foremny***

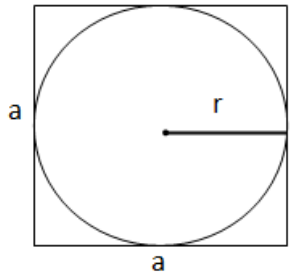
Gdy w sześciokącie foremnym poprowadzimy przekątne, podzielimy go na sześć trójkątów równobocznych o boku równym bokowi sześciokąta. Z powyższej własności wynika wzór na pole sześciokąta foremnego. Pole sześciokąta jest równe polu sześciu trójkątów równobocznych:



$P = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ stąd, po wykonaniu skracania liczb 6 i 4: $\boxed{P = 3\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}$

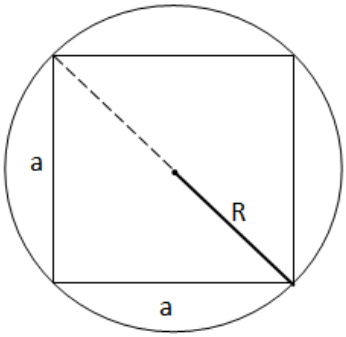
17.8 Okrąg wpisany i opisany na figurach

- okrąg wpisany w kwadrat



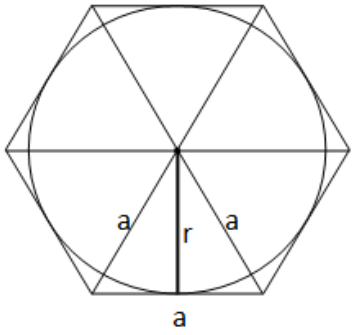
$\boxed{r = \frac{1}{2}a}$

- okrąg opisany na kwadracie



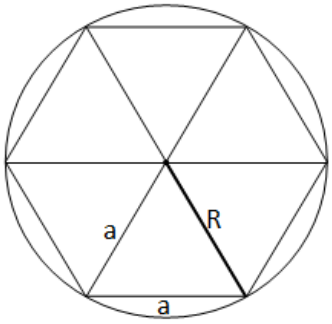
$\boxed{R = \frac{1}{2}a\sqrt{2}}$

- okrąg wpisany w sześciokąt foremny



$\boxed{r = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

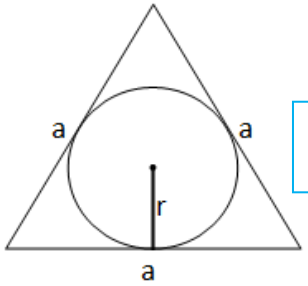
- okrąg opisany na sześciokącie foremnym



$\boxed{R = a}$

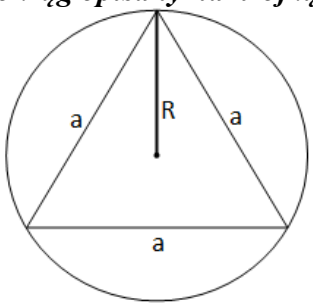
www.matematykam.pl

- okrąg wpisany w trójkąt równoboczny



$\boxed{r = \frac{1}{3}h}$

- okrąg opisany na trójkącie równobocznym



$\boxed{R = \frac{2}{3}h}$

Suma długości promieni okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie równobocznym jest równa wysokości tego trójkąta: $\mathbf{R + r = h.}$

❖ ***Czworokąty***

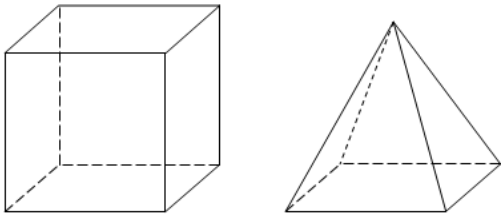
W czworokąt możemy wpisać okrąg, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.
Na czworokącie można opisać okrąg, gdy suma przeciwległych kątów wynosi 180°.

18. STEREOMETRIA (BRYŁY)

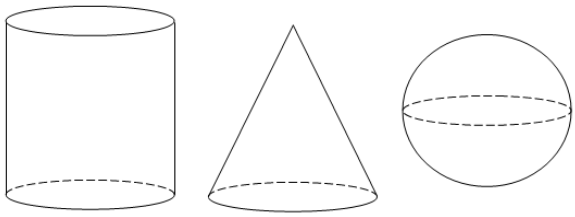
UWAGA! Większość wzorów w tym rozdziale jest zawarta w tablicach matematycznych dostępnych podczas egzaminu maturalnego w dziale STEREOMETRIA. Te, których tam nie znajdziemy, są obramowane niebieską ramką.

18.1 Podział i nazewnictwo brył

Bryły wielościenne
- GRANIASTOSŁUPY -OSTROSŁUPY



Bryły obrotowe
- WALEC - STOŻEK - KULA



Nazewnictwo brył wielościennych

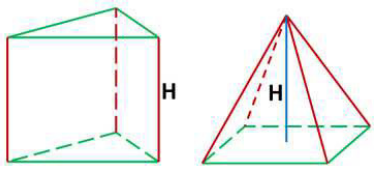
Nazwa składa się ze słowa graniastosłup/ostrosłup i słowa informującego, jaka figura jest w podstawie. Przykładowo: graniastosłup trójkątny to graniastosłup, który w podstawie ma trójkąt. Tworząc nazwy, czasem używamy też słowa: „**prawidłowy**". Bryła prawidłowa to taka, która ma w podstawie figurę foremną (taką, która ma boki tej samej długości i kąty tej samej miary). Ponadto, niektóre bryły mają nazwy „specjalne": prostopadłościan – to graniastosłup, który ma w podstawie prostokąt; sześcian – wszystkie jego ściany i podstawy mają kształt identycznych kwadratów; czworościan foremny – to ostrosłup, którego wszystkie ściany i podstawa są identycznymi trójkątami równobocznymi.

18.2 Kąty i odcinki w bryłach

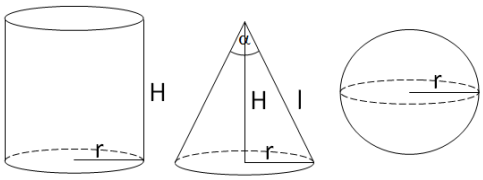
www.matematykam.pl

❖ ***Odcinki w bryłach***

Odpowiednie odcinki w graniastosłupach i ostrosłupach mają swoje nazwy: **krawędzie podstawy** (na **zielono**), pozostałe krawędzie nazywamy **krawędziami ścian bocznych** (na **czerwono**)[wysokość graniastosłupa (H) jest równa długości krawędzi bocznych], **wysokość ostrosłupa (H)** (na **niebiesko)** to odcinek opuszczony z wierzchołka, prostopadle na podstawę.

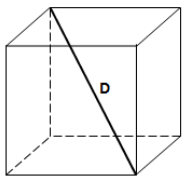


Wielkościami charakteryzującymi: **walec** są: **promień podstawy (r) i wysokość (H); stożek** są: **promień podstawy (r), wysokość (H), tworząca (l), kąt rozwarcia (α); kulę – promień (r).**



Przekątna graniastosłupa

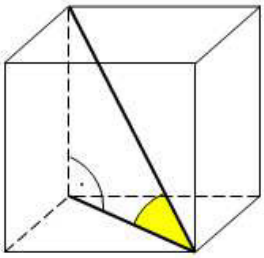
To odcinek łączący dwa wierzchołki, leżące na innych podstawach i nie należące do jednej ściany bocznej. W praktyce możemy się spotkać z przekątną prostopadłościanu.



Kąty w bryłach wielościennych

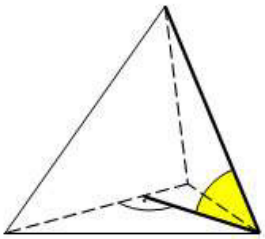
Jeżeli w zadaniu podany jest opis kąta zawartego nie między konkretnymi krawędziami, ale pojawia się jakaś ściana bryły, musimy ustalić jakie krawędzie ten kąt „reprezentują". Przedstawimy cztery tego typu przypadki, jakie mogą pojawić się w zadaniach.

kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą (gdy w podstawie mamy czworokąt)



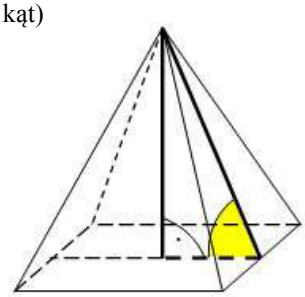
Kąt będzie zawierał się między **przekątną graniastosłupa** a **przekątną podstawy.**
Oba odcinki wraz z krawędzią boczna tworzą trójkąt prostokątny.

kąt między krawędzią boczną ostrosłupa a podstawą (gdy w podstawie mamy trójkąt)



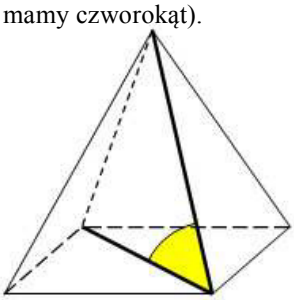
Kąt będzie zawierał się między **krawędzią boczną** a **wysokością podstawy.**

kąt między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa (gdy w podstawie mamy czworokąt)



Kąt będzie zawierał się między **wysokością ściany bocznej** a **odcinkiem poprowadzonym od spodka tej wysokości do spodka wysokości ostrosłupa**. Oba odcinki wraz z wysokością ostrosłupa tworzą trójkąt prostokątny.

kąt między krawędzią boczną a podstawą ostrosłupa (gdy w podstawie mamy czworokąt).



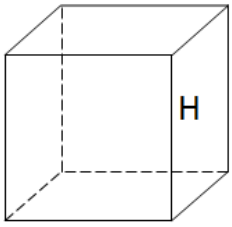
Kąt będzie zawierał się między **krawędzią boczną** a **przekątną podstawy**.
Oba odcinki wraz z przeciwległą krawędzią boczną, tworzą trójkąt równoramienny, którego wysokość jest równa wysokości ostrosłupa.

18.3 Pole powierzchni całkowitej i objętość brył

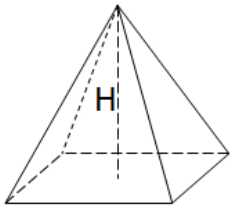
www.matematykam.pl

Bryły wielościenne

- GRANIASTOSŁUPY

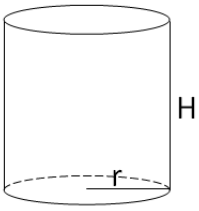


-OSTROSŁUPY

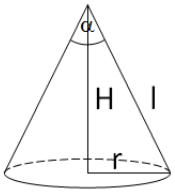


Bryły obrotowe

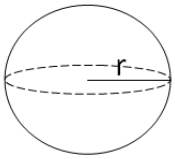
- WALEC



- STOŻEK



- KULA



POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ

$Pc = 2Pp + Pb$	$Pc = Pp + Pb$	$Pc = 2\pi r^2 + 2\pi rH$ $Pc = 2\pi r(r + H)$	$Pc = \pi r^2 + \pi rl$ $Pc = \pi r(r + l)$	$Pc = 4\pi r^2$

OBJĘTOŚĆ

$V = Pp \cdot H$	$V = \frac{1}{3} \cdot Pp \cdot H$	$V = \pi r^2 H$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Wszystkie zapisane powyżej wzory, znajdziemy w tablicach matematycznych.

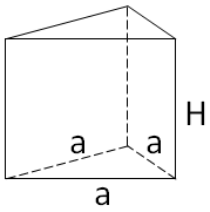
❖ ***Omówienie wzorów***

Bryły wielościenne

We wzorach: Pp – pole podstawy; Pb – pole powierzchni bocznej, które stanowi sumę pól wszystkich ścian bocznych.

Każdy ze wzorów dla brył wielościennych należy „sprecyzować". W miejscu Pp wpisujemy wzór na pole figury, jaka znajduje się w podstawie. W miejscu Pb wpisujemy sumę, złożoną z zapisanych rów na pola dla poszczególnych ścian.

Przykład: graniastosłup prawidłowy trójkątny.



Zapisujemy wzory ogólne:

$$Pc = 2Pp + Pb \qquad V = Pp \cdot H$$

Precyzujemy wzory:

- w podstawie mamy trójkąt równoboczny, więc zapisujemy wzór na pole tej figury: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

- mamy 3 identyczne ściany boczne – prostokąty o bokach a i H, więc wzór na pole powierzchni bocznej będzie miał postać: 3 · aH.

$$Pc = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH \qquad V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H$$

$$Pc = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

www.matematykam.pl

Bryły obrotowe.

Dla walca i stożka mamy po dwie postaci wzorów na pole powierzchni całkowitej. Wszystkie znajdziemy w tablicach matematycznych.

Pierwsza wersja wzoru zawiera w rzeczywistości sumę dwóch elementów: pola podstawy i pola powierzchni bocznej. W zadaniach może pojawić się polecenie obliczenia pola podstawy albo pola powierzchni bocznej (a nie pola powierzchni całkowitej).

Przykład:

walec: $Pc = \overbrace{2\pi r^2}^{Pp} + \overbrace{2\pi rH}^{Pb}$ - stąd możemy zapisać: $Pp = \pi r^2$; $Pb = 2\pi rH$

stożek: $Pc = \overbrace{\pi r^2}^{Pp} + \overbrace{\pi rl}^{Pb}$ - stąd możemy zapisać: $Pp = \pi r^2$; $Pb = \pi rl$

Druga wersja jest nieco prostsza w wykorzystaniu, ale nie zawiera rozgraniczenia na te dwa elementy.

18.4 Podobieństwo brył

Do podobieństwa brył podchodzimy w ten sam sposób jak do podobieństwa figur płaskich (podrozdział 17.3). Tu także należy ustalić, która bryła będzie **„podstawową", a która do niej podobną**. Zawsze będziemy **dzielić wielkości bryły podobnej, przez wielkości bryły „podstawowej".** Tak jak w przypadku figur płaskich, **skalę podobieństwa** otrzymamy, dzieląc przez siebie odpowiadające sobie odcinki lub obwody (odpowiadających sobie ścian). Stosunek **pól odpowiadających sobie ścian, pól powierzchni bocznych czy pól powierzchni całkowitych** dwóch brył podobnych daje nam

skalę do kwadratu: $\frac{P'}{P} = k^2$

STOSUNEK OBJĘTOŚCI

Nie mieliśmy z nim do czynienia wcześniej, bo figury płaskie nie mają objętości.

Stosunek objętości dwóch brył daje nam **skalę do sześcianu.**

$$\frac{V'}{V} = k^3$$

Przykład: Prostopadłościan o objętości $3cm^3$ jest podobny do prostopadłościanu o objętości $81cm^3$. Oblicz skalę podobieństwa brył.

$V = 81cm^3$
$V' = 3cm^3$

Z treści wynika, że prostopadłościanem „podstawowym" jest ten o objętości $81cm^3$, a do niego podobnym, ten o objętości $3cm^3$.

$$\frac{3cm^3}{81cm^3} = k^3$$
$$k^3 = \frac{1}{27}$$
$$k = \frac{1}{3}$$

19. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

19.1 Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Prawdopodobieństwo obliczamy, gdy mamy do czynienia ze zdarzeniami losowymi.
Przykładem może być uzyskanie parzystej liczby oczek podczas rzutu kostką.
Zdarzenie elementarne – jedno konkretne zdarzenie. Oznaczamy symbolem: ω
Przestrzeń zdarzeń elementarnych – to zbiór wszystkich zdarzeń. Oznaczamy symbolem: Ω
Zdarzenie losowe to zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, spełniających dane kryterium. Oznaczamy je dużą literą alfabetu (A, B, C…).
Dla przykładu rzutu kostką: $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ $A = \{2,\ 4,\ 6\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych, zawiera wszystkie zdarzenia, jakie możemy uzyskać.

Kryterium jest uzyskanie parzystej liczby oczek, czyli: 2, 4, 6.

Moc zbioru - to liczba elementów zbioru - nad symbolem zbioru zapisujemy dwie poziome kreski, lub umieszczamy go między dwoma pionowymi kreskami (takie oznaczenie znajduje się w tablicach matematycznych): $\overline{\overline{\Omega}} = 6$; $\overline{\overline{A}} = 3$ lub $|\Omega| = 6$; $|A| = 3$

19.2 Prawdopodobieństwo klasyczne

WZÓR z tablic matematycznych (RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA):
Prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równa $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Dla przykładu zawartego w poprzednim podrozdziale: prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na uzyskaniu parzystej liczby oczek.:

$|\Omega| = 6$; $|A| = 3$ $\quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

www.matematykam.pl

Zapis procentowy
Prawdopodobieństwo często wyraża się za pomocą procentów. Sposób jego obliczania się nie zmienia. Wystarczy otrzymaną wartość ułamkową zamienić na procenty. Dla przykładu:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$$

19.3 Proste przypadki (rzut monetą/kostką)

Mamy na myśli niezbyt skomplikowane zdarzenia losowe, zawierające się w przestrzeni zdarzeń elementarnych, do której należy co najwyżej kilkadziesiąt zdarzeń elementarnych. Należą do nich: rzuty kostką, rzuty monetą, losowanie co najwyżej paru kart ze zbioru kilku.
Podejście do tego typu zdarzeń zostało już „zarysowane" w pierwszym podrozdziale 19.1. Obliczenie prawdopodobieństwa tego typu zdarzeń wymaga wykonania trzech czynności:

1) wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych przestrzeni oraz wszystkich zdarzeń konkretnego zdarzenia losowego: Ω, A ; **2)** ustalenie mocy obu zbiorów: $|\Omega|$, $|A|$; **3)** obliczenie prawdopodobieństwa zgodnie ze wzorem, przedstawionym w poprzednim podrozdziale: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$

Gdy rzucamy przynajmniej dwoma kostkami, monetami itp. należy pamiętać, że poszczególne zdarzenia elementarne nie będą już składały się z pojedynczych wyników, ale ich par, trójek itd.
Przykład: Rzucamy dwiema monetami. Będziemy mieli do czynienia z dwuelementowym wynikiem (orła oznaczamy O, reszkę R). Przykładowe zdarzenie elementarne: (R, R) – dwie reszki.

Przykładowe zadanie: Rzucamy dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na otrzymaniu sumy oczek na obu kostkach nie mniejszej niż 9.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych zawiera wszystkie zdarzenia, jakie możemy uzyskać. Jedno zdarzenie elementarne to para liczb, ponieważ rzucamy dwoma kostkami.

$$\Omega=\{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6);$$
$$(2,1);\ (2,2);\ (2,3);\ (2,4);\ (2,5);\ (2,6);$$
$$(3,1);\ (3,2);\ (3,3);\ (3,4);\ (3,5);\ (3,6);$$
$$(4,1);\ (4,2);\ (4,3);\ (4,4);\ (4,5);\ (4,6);$$
$$(5,1);\ (5,2);\ (5,3);\ (5,4);\ (5,5);\ (5,6);$$
$$(6,1);\ (6,2);\ (6,3);\ (6,4);\ (6,5);\ (6,6)\}$$

www.matematykam.pl

Zdarzenie elementarne polega na uzyskaniu sumy oczek nie mniejszej niż 9, czyli od liczby 9 włącznie wzwyż. Wystarczy wybrać takie zdarzenia z przestrzeni zdarzeń elementarnych zapisanej powyżej.

$$A=\{(3,6);\ (4,5);\ (4,6);\ (5,4);\ (5,5);\ (5,6);\ (6,3);\ (6,4);\ (6,5);\ (6,6)\}$$

$|\Omega|=36$ **Liczymy wszystkie zdarzenia przestrzeni zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia losowego i zapisujemy moce obu zbiorów.**

$|A|=10$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A ze wzoru:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

19.4 Elementy kombinatoryki (zasada mnożenia, permutacje, wariacje bez powtórzeń, wariacje z powtórzeniami).

UWAGA! Oprócz pierwszego wzoru dla zasady mnożenia (niebieska ramka), wszystkie wzory znajdziemy w tablicach matematycznych.

Omówimy tutaj cztery podstawowe „narzędzia" wykorzystywane do obliczania liczby elementów zbioru (mocy zdarzeń), które stosujemy, gdy liczba elementów zbioru jest bardzo duża i wypisywanie ich wszystkich, tak jak robiliśmy to w prostych przypadkach (poprzedni podrozdział), zajęłoby nam stanowczo zbyt dużo czasu.
Pierwsza z opisanych metod (zasada mnożenia) jest uniwersalna i może zastąpić pozostałe trzy.

❖ ***Zasada mnożenia***

Stosujemy ją, gdy zdarzenie jest ciągiem kilku elementów (liczb, liter itp.), a każdy element losujemy z konkretnego zbioru. Liczbę elementów konkretnego zbioru oznaczamy literą **k**.
Przykład: Trzyelementowy kod składa się z dwóch cyfr (od 1 do 9) oraz litery alfabetu (spośród liter: ABCD). Obliczymy liczbę wszystkich kombinacji jakie możemy uzyskać.
Liczba elementów w ciągu wynosi 3:
- pierwszy i drugi wybieramy spośród 9 cyfr: $k_1 = 9$; $k_2 = 9$;
- trzeci wybieramy ze zbioru 4 liter: $k_3 = 4$.

Liczba wszystkich kombinacji jest iloczynem liczb elementów wszystkich zbiorów: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \ldots$

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$$

❖ ***Permutacje***

Mamy z nimi do czynienia, gdy **określamy liczbę wszystkich ciągów, jakie możemy utworzyć ze wszystkich elementów danego zbioru,** którego liczbę elementów oznaczamy **n.**

Przykład: Mamy 8 różnokolorowych (niebieskie, białe, czarne, czerwone, zielone, żółte, fioletowe i pomarańczowe) pudełek w szeregu. Określimy ile istniej możliwości ustawienia pudełek.

Liczba elementów zbioru, z którego tworzymy ciąg wynosi 8: n = 8

Liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych (liczbę permutacji) obliczamy ze wzoru:

$n!$ czytaj: n silnia. Silnia jest działaniem, którego wynikiem jest iloczyn liczb całkowitych od liczby 1, do danej liczby: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Dla rozpatrywanego przykładu:

$$n! = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

❖ ***Wariacje bez powtórzeń***

Z wariacją bez powtórzeń mamy do czynienia, gdy **tworzymy ciąg z elementów danego zbioru, ale ciąg nie musi składać się ze wszystkich elementów zbioru.** Przykładowo w zbiorze może znajdować się dziesięć elementów, a powstały ciąg jest trzyelementowy. Zwrot „bez powtórzeń" oznacza, że żaden element w powstałym ciągu nie może się powtarzać. W przypadku losowania kolejnych elementów ciągu, element już wylosowany nie wraca do puli i nie może zostać wylosowany ponownie (jest to tzw. losowanie bez zwracania). Liczbę elementów zbioru oznaczamy literą **n**. Liczbę elementów wariacji (powstałego ciągu) oznaczamy literą **k**.

Przykład: Każdemu pracownikowi przydzielony jest trzycyfrowy kod identyfikacyjny złożony z cyfr od 1 do 9, przy czym żadna cyfra w kodzie nie może się powtarzać**.**

Liczba elementów zbioru, z którego losujemy elementy ciągu wynosi 9 (mamy 9 cyfr): $n = 9$

Liczba elementów ciągu wynosi 3 (kod zawiera 3 cyfry): $k = 3$

Liczbę wszystkich możliwych wariacji bez powtórzeń obliczamy ze wzoru:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dla przykładu:

$$V_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!}$$

UWAGA: Mając do wykonania powyższe działanie, nie obliczajmy od razu silni z liczb w liczniku i mianowniku. Najpierw powinniśmy uprościć dane wyrażenie (może się to okazać niezbędne – dla zbyt dużych liczb wynik działania „silni" nie zmieści się na ekranie kalkulatora). W tym celu silnię większej liczby (9!) rozkładamy na silnię mniejszej liczby (6!) oraz iloczyn odpowiednich liczb: 9! = 6! · 7· 8 · 9

$$\overline{\overline{\Omega}} = V_9^3 = \frac{9!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

www.matematykam.pl

❖ ***Wariacje z powtórzeniami***

Wzór na wariację z powtórzeniami stosujemy w takich przypadkach jak wariację bez powtórzeń, z tą różnicą, że poszczególne elementy w ciągu mogą się powtarzać.

Liczbę wszystkich możliwych wariacji z powtórzeniami obliczamy ze wzoru:

$$W_n^k = n^k$$

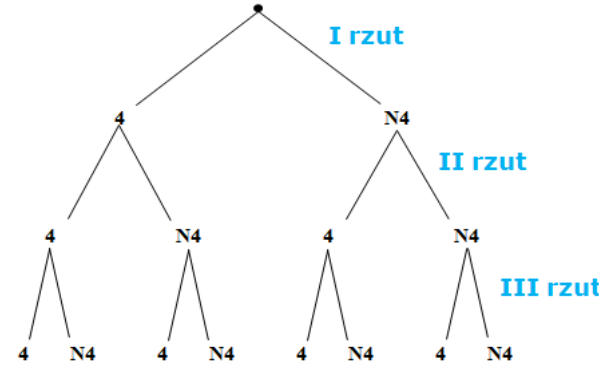
19.5 Drzewa zdarzeń

W przypadku drzew zdarzeń będziemy obliczać prawdopodobieństwa mniejszych zdarzeń, składających się na przestrzeń zdarzeń elementarnych, a następnie będziemy wykonywać działania na tych prawdopodobieństwach. **Podstawowym warunkiem jest wystąpienie przynajmniej dwóch losowań** (np: losujemy trzy bile z siedmiu itp.). **Nie może także być ich zbyt dużo** (najlepiej nie więcej niż trzy).Wspomniane wcześniej **„mniejsze zdarzenie" to jedno losowanie lub jeden wybór.**

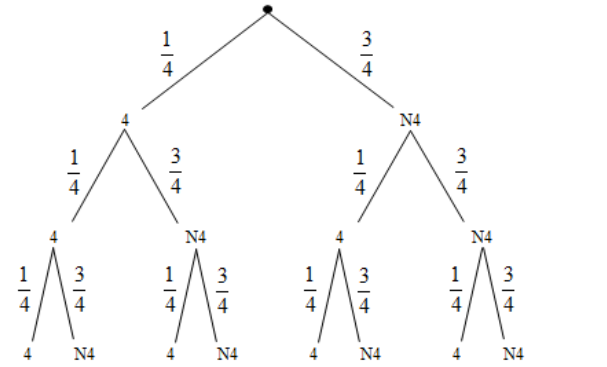
Przykład: Rzucamy trzy razy czworościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia dokładnie dwóch czwórek.

UWAGA. To jak szczegółowe będzie nasze drzewko wynika z warunku zdarzenia losowego. Wprawdzie mamy czworościenną kostkę, a więc możliwe wyniki w jednym rzucie to: 1, 2, 3, 4, ale warunkiem jest uzyskanie dwóch czwórek. Nie interesuje nas jaka liczba oczek wypadnie, gdy nie wypadnie czwórka. Dlatego każde losowanie rozpatrujemy pod kątem: „czwórka" (4) lub „nie czwórka" (N4).

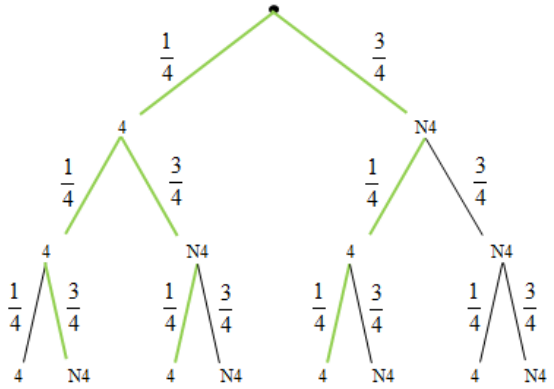
KROK I.
Rysujemy drzewko dla wszystkich rzutów/losowań.



KROK II.
Zapisujemy prawdopodobieństwo „mniejszych zdarzeń" na poszczególnych gałęziach.



KROK III.
Ustalamy które „drogi" spełniają opisane w zadaniu zdarzenie losowe. Jedna konkretna „droga" wiedzie od punktu startu, do wyniku ostatniego rzutu/losowania.



KROK IV.
Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia losowego zgodnie z zasadą:
P(A) = iloczyn prawdopodobieństw jednej „drogi" + iloczyn prawdopodobieństw drugiej + iloczyn prawdopodobieństw trzeciej …

$$P(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

$$P(A)=\frac{3}{64}+\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{9}{64}$$

www.matematykam.pl

19.6 Własności prawdopodobieństwa

WZORY z tablic matematycznych (RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA):

- Własności prawdopodobieństwa

$0 \le P(A) \le 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\Omega) = 1$ Ω - zdarzenie pewne

$P(\varnothing) = 0$ $\varnothing$ - zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A) \le P(B)$ gdy $A \subset B \subset \Omega$

★ $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

★ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

❖ ***Objaśnienia***

Zdarzenie pewne zachodzi, gdy spełnia je każde zdarzenie z przestrzeni wszystkich zdarzeń (Ω), więc liczba zdarzeń elementarnych zdarzenia losowego jest równa liczbie wszystkich zdarzeń, stąd prawdopodobieństwo wynosi 1. Przykład: Zdarzenie polegające na uzyskaniu jakiejkolwiek liczby oczek (1, 2, 3, 4, 5, 6) podczas rzutu kostką.

Zdarzenie niemożliwe zachodzi, gdy nie ma żadnego zdarzenia elementarnego, które je spełnia i jego prawdopodobieństwo wynosi 0. Przykład: Zdarzenie polegające na otrzymaniu siedmiu oczek, podczas rzutu jedną kostką.

Zdarzenia przeciwne (A i A'), to zdarzenia, które się wzajemnie „uzupełniają" tworząc całą przestrzeń zdarzeń elementarnych, ale nie mają elementów wspólnych. Przykład: Jeżeli rzucamy kostką i zdarzenie A polega na wyrzuceniu 2 lub 3, to zdarzenie przeciwne A' będzie polegało na wyrzuceniu wszystkich pozostałych liczb: 1, 4, 5, 6.

Część wspólna zdarzeń $(A \cap B)$ - jej określanie zachodzi na tej samej zasadzie, jak ustalanie części wspólnej innych zbiorów (podrozdział 4.3).

❖ ***Wykorzystanie wzorów***

Interesują nas głównie wzory, które oznaczyliśmy gwiazdką. Ich wykorzystanie przedstawimy na przykładzie: Oblicz prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń losowych A i B jeżeli:

$$P(A') = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie:

$P(A \cap B) = ?$

Mamy obliczyć prawdopodobieństwo części wspólnej zdarzeń losowych. Możemy wykorzystać wzór na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Brakuje nam wartości P(A), ale znamy wartość P(A'), możemy więc wykorzystać wzór:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Podstawiamy do wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń znane wartości i rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} - \frac{6}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

20. STATYSTYKA

www.matematykam.pl

20.1 Dane statystyczne i sposoby ich prezentacji

❖ ***Dane statystyczne***

Dane statystyczne gromadzi się dla danej grupy (ludzi, zdarzeń itp.) i danego kryterium. Przykład: Zgromadzono dane o semestralnej ocenie z matematyki w grupie 20 uczniów. Są one następujące: 2, 2, 5, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 4, 5, 6, 4, 4, 6, 2.

- mamy tutaj jedną **grupę** (tutaj uczniów): 20,
- **kryterium** jest uzyskana ocena.

W przykładzie przedstawionym powyżej zebrane dane nie są w żaden sposób „posegregowane". Zanim przystąpimy do jakichkolwiek obliczeń statystycznych, które przedstawimy w następnym podrozdziale, musimy je uszeregować (od najmniejszej wartości, do największej). Dla przykładu:

2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.

❖ ***Sposoby prezentacji danych***

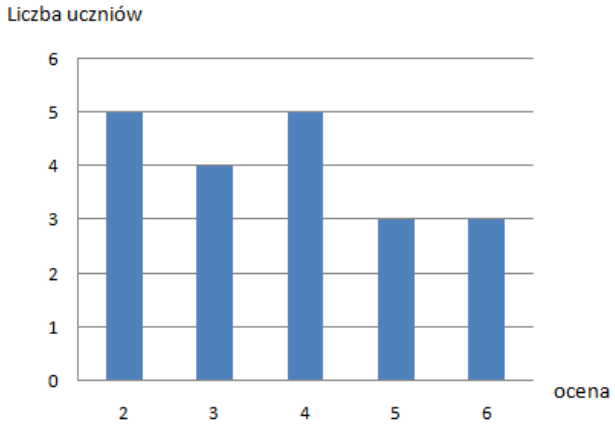
Tabela

Zapisując dane w tabeli, grupujemy te same wyniki. Dla rozpatrywanego przykładu, tabela będzie następująca:

ocena	2	3	4	5	6
liczba uczniów	5	4	5	3	3

Diagram słupkowy

Tu także wyniki muszą być zgrupowane dla tych samych wartości. Dla rozpatrywanego przykładu:



20.2 Parametry danych statystycznych (średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe, moda, rozstęp)

WZORY z tablic matematycznych (STATYSTYKA):

- Średnia arytmetyczna *n* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

- Średnia ważona liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, którym przypisano odpowiednie dodatnie wagi $w_1, w_2, \ldots, w_3$ jest równa:

$$\overline{a} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \ldots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

www.matematykam.pl

- Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru *n* danych liczbowych $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n$ jest:

  - dla *n* nieparzystych $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

  - dla *n* parzystych: $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

  Wariancją *n* danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{a}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + \ldots + (a_n - \overline{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} - (\overline{a})^2$$

  Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

❖ ***Wykorzystanie wzorów na średnią arytmetyczną, medianę, wariancję i odchylenie standardowe***, przedstawimy na jednym przykładzie:

W tabeli zebrane są wyniki ankiety, przeprowadzonej w dziesięcioosobowej grupie. Ankietowani odpowiadali na pytanie ile razy w roku wyjeżdżają na wakacje:

liczba wyjazdów	1	2	3
liczba ankietowanych	5	4	1

Gdybyśmy zapisali wyniki ankiety w szeregu niemalejącym:

1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}

Średnia arytmetyczna

UWAGA: Zgodnie ze wzorem powinniśmy dodawać osobno wszystkie wyniki, a następnie podzielić sumę przez liczbę ankietowanych. Nie musimy jednak dodawać każdego wyniku osobno, szczególnie gdy są one „zgrupowane" w tabeli lub na wykresie słupkowym. Przykładowo: mamy pięć wyników: 1 - nie musimy osobno dodawać: 1+1+1+1+1, ale możemy wspomóc się mnożeniem: 5·1.

$$\bar{a} = \frac{1\cdot 5 + 4\cdot 2 + 3}{10} = \frac{5+8+3}{10} = \frac{16}{10} = 1{,}6$$

Mediana

Wartość mediany ustalamy inaczej, gdy liczba wyników jest parzysta lub nieparzysta. Gdy jest nieparzysta, medianą jest środkowy wyraz $a_{\frac{n+1}{2}}$. Przykładowo: gdybyśmy mieli 11 ankietowanych, środkowym wyrazem, byłby wyraz szósty: $a_{\frac{11+1}{2}} = a_{\frac{12}{2}} = a_6$. Tu mamy parzystą liczbę wyrazów (10), a więc obliczamy medianę, za pomocą wzoru:

$$\frac{1}{2}\left(a_{\frac{10}{2}} + a_{\frac{10}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(a_5 + a_6) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{1}{2}\cdot 3 = 1{,}5$$

Podstawiamy wartość piątego i szóstego wyrazu.

www.matematykam.pl

Wariancja i odchylenie standardowe

UWAGA: Tu także, tak jak w przypadku średniej arytmetycznej, nie musimy zapisywać każdego wyrazu osobno, ale możemy „grupować" wyrazy o tej samej wartości.

W celu obliczenia wariancji korzystamy z drugiej „wersji" wzoru:

$$\sigma^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} - (\bar{a})^2 = \frac{5\cdot(1)^2 + 4\cdot(2)^2 + 3^2}{10} - 1{,}6^2 = \frac{30}{10} - 2{,}56 = 3 - 2{,}56 = 0{,}44$$

Odchylenie standardowe otrzymamy pierwiastkując wartość wariancji:

$$\sigma^2 = 0{,}44$$
$$\sigma \approx 0{,}663$$

❖ ***Średnia ważona***

Mamy z nią do czynienia, gdy poszczególne wartości mają swoje wagi.

Przykład: uczeń w ciągu semestru otrzymał oceny zebrane w tabeli, przy czym waga sprawdzianu wynosi 3, kartkówki 2, a zadania domowego 1.

sprawdziany:		kartkówki:			Z. D.
4	3	4	5	5	5

$$\bar{a} = \frac{3\cdot 4+3\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 5+1\cdot 5}{3+3+2+2+2+1} = \frac{54}{13} \approx 4{,}15$$

❖ ***Moda i rozstęp***

Nie znajdziemy informacji o tych dwóch parametrach w tablicach matematycznych, ale powinniśmy je znać.

Moda (zwana również wartością modalną lub dominantą) jest to wartość, która w zebranych danych statystycznych pojawia się najczęściej. Oznaczamy ją symbolem **D**.

Przykład: W przeprowadzonej ankiecie, na pytanie dotyczące liczby rodzeństwa, piętnastu ankietowanych, uzyskano dane: 2, 2, 1, 0, 3, 4, 1, 1, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 2.

Po uszeregowaniu danych: 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4.

Wśród zgromadzonych danych wielkością, która pojawia się najczęściej jest liczba 1: $D=1$

Gdy mamy kilka wielkości, które pojawiają się z tą samą, największą liczbą razy, mamy do czynienia z kilkoma dominantami.

Przykład: W tabeli przedstawiono wyniki egzaminu dla 100 studentów:

ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
liczba studentów	22	25	12	25	10	6

Najwięcej studentów (25) otrzymało ocenę 3 i tyle samo studentów otrzymało ocenę 4. Mamy do czynienia z dwoma dominantami: $D_1 = 3, \quad D_2 = 4$

www.matematykam.pl

Gdy wszystkie wartości pojawiają się równie często, wtedy nie ma dominanty.

Przykład: W dwunastu wybranych domach jednorodzinnych policzono liczbę pokoi i otrzymano wyniki: 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6.

Wszystkie otrzymane wyniki powtarzają się równie często (po cztery razy), dlatego zapisujemy:
Brak dominanty

Rozstęp przedstawia jak duży jest zakres wartości danych. Obliczamy go odejmując od największej wartości najmniejszą.

$$R = a_{max} - a_{min}$$

Rozstęp dla przedstawionego powyżej przykładu (tabela – oceny w grupie 100 studentów) wynosi:

$$R = a_{max} - a_{min} = 5 - 2 = 3$$